N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTEUR INGENIEUR

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Monsieur Georges GAUBERT

pour obtenir

le titre de Docteur Ingénieur

*****

Sujet de la thèse : Simulation analogique d'une équation mixte à l'aide d'éléments actifs et passifs non linéaires programmables. Application aux écoulements transsoniques faiblement perturbés.

Soutenue le 28 juin 1973 devant la Commission d'Examen

MM. Lucien MALAVARD Président
Pierre ALAIS Examinateur
Michel ENSELME Examinateur
Joseph TAILLET Examinateur

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTEUR INGENIEUR

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Monsieur Georges GAUBERT

pour obtenir

le titre de Docteur Ingénieur

*****

Sujet de la thèse : Simulation analogique d'une équation mixte à l'aide d'éléments actifs et passifs non linéaires programmables. Application aux écoulements transsoniques faiblement perturbés.

Soutenue le 28 juin 1973 devant la Commission d'Examen

MM. Lucien MALAVARD Président
Pierre ALAIS Examinateur
Michel ENSELME Examinateur
Joseph TAILLET Examinateur

/EC

REMERCIEMENTS

J'exprime ma plus profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Malavard pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de diriger ce travail et le remercie des conseils qu'il m'a donnés.

Que Monsieur le Professeur Alais qui a bien voulu accepter de faire partie du jury, trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie infiniment Messieurs les Directeurs de l'ONERA :

Monsieur le Directeur Général de m'avoir permis de soutenir une thèse sur ce sujet,

Monsieur Legendre, Haut-Conseiller Scientifique, de l'intérêt qu'il a porté à cette réalisation,

Messieurs Taillet et Moreau, Directeurs Scientifiques, de l'attention bienveillante qu'ils ont manifestée au cours de ce travail.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Enselme, Chef de Division, qui a suivi, à chaque instant, cette étude et m'a fait profiter des connaissances de Messieurs Guillois et Dommée pour la mise au point de certains équipements électroniques.

Je remercie également Monsieur Feuillet pour l'aide qu'il m'a apportée dans le dépouillement des essais, ainsi que Madame Germain qui a été mon intermédiaire auprès de ceux qui ont collaboré à la publication de ce texte.

Qu'il me soit permis de remercier Messieurs Garand et Théneveau et Madame Pluet pour la réalisation du film.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

UNIV. LEIDEN BIBL.

R E S U M E

L'équation mixte du type

$$Q\,\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = S\,\frac{\varphi_x}{U}\,\varphi_{xx}$$

où φ est le potentiel induit dans le domaine, est simulée par un réseau résistif dans lequel des résistances variables avec la tension appliquée à leurs bornes représentent le terme non linéaire.

Bien que cette équation présente selon la valeur du terme $Q - S\,\frac{\varphi_x}{U}$ un caractère elliptique, parabolique ou hyperbolique, aucune itération n'est nécessaire pour en obtenir la solution.

Le problème majeur rencontré dans la simulation concerne les éléments non linéaires et plus précisément leur stabilité.

L'étude faite peut se révéler intéressante dans le cas d'un développement de la méthode analogique dans le traitement d'équations non linéaires.

Dans le cadre de l'application traitée, cette équation régit les petites perturbations induites par un profil ; la valeur du nombre de Mach local délimitant les trois domaines cités précédemment (subsonique, sonique, supersonique).

Un dispositif de visualisation faisant apparaître le profil, le potentiel de perturbation et la répartition des vitesses correspondantes, permet d'apprécier à chaque instant l'influence des différents paramètres et d'optimiser le problème.

Les résultats obtenus sur plusieurs types de profils, placés seuls dans l'espace, ont permis de tester la méthode et de la valider par comparaison avec des résultats d'origines très diverses.

Un certain nombre de résultats concernant les écoulements en présence de parois et autour de grilles ont été obtenus.

Le phénomène d'onde de choc a pu être étudié et a conduit à des résultats intéressants.

Différentes extensions possibles de la méthode sont envisagées.

-=-=-=-=-=-=-

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION

NOTATIONS .....

Première Partie :

Simulation analogique de l'équation mixte du type :

$$R\,\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = S\,\frac{\varphi_x}{U}\,\varphi_{xx} \qquad 12$$

1 - INTRODUCTION 13

2 - REPRESENTATION ANALOGIQUE 13

2.1 - Simulation de l'équation 13
2.2 - Conditions aux limites 15
2.3 - Présentation du réseau analogique 17
2.4 - Système de visualisation 17
2.5 - Dépouillement des résultats 17

3 - ELEMENT NON LINEAIRE 18

3.1 - Introduction 18
3.2 - Principe - Fonctionnement 18
3.3 - Différents types 19

3.3.1 - Introduction 19
3.3.2 - Résistance positive variable 19
3.3.3 - Résistance négative variable 20

3.4 - Réalisation pratique 20
3.5 - Réglage de l'élément 21

3.5.1 - Principe 21
3.5.2 - Réglage 21
3.5.3 - Système de visualisation 22
3.5.4 - Précision du réglage 23

4 - ETUDE DE LA STABILITE 24

4.1 - Introduction 24
4.2 - Circuit actif : NIC 24

4.2.1 - Définition 24
4.2.2 - Propriété 25
4.2.3 - Exemple de réalisation 25

4.3 - Etude théorique de la stabilité 26

4.3.1 - Critère de stabilité 26
4.3.2 - Application au cas $i = \alpha v^2 + bv$
Corollaire du critère de stabilité 27

4.4 - Etude expérimentale de la stabilité 29

4.4.1 - Introduction 29
4.4.2 - Stabilité des différents NIC 30
4.4.3 - Stabilité dans le réseau 31

4.5 - Conclusion 32

Deuxième Partie :

Application à l'équation des petites perturbations
en écoulement transsonique 32

1 - INTRODUCTION 33

2 - RAPPELS AERODYNAMIQUES 34

2.1 - Equation des petites perturbations 34
2.2 - Coefficient de pression 37
2.3 - Condition de choc 38

3 - COMPLEMENTS A L'ANALOGIE 39

3.1 - Points particuliers de la parabole 40
3.2 - Représentation du choc 40
3.3 - Correspondance Analogie-Aérodynamique 41
3.4 - Visualisation 44

4 - PROFIL SYMETRIQUE SEUL DANS L'ESPACE 44

4.1 - Réalisation du réseau 44
4.2 - Profils lenticulaires 45
4.3 - Profils losangiques 47
4.4 - Profils elliptiques 47
4.5 - Etude du NACA 0012 48

5 - ECOULEMENT AUTOUR D'UNE GRILLE D'AUBES 48

5.1 - Etude théorique 48
5.2 - Représentation analogique 56
5.3 - Compléments et simplifications 58
5.4 - Résultats 59

6 - PROBLEMES CONCERNANT LES SOUFFLERIES 61

6.1 - Mesure de débit 61
6.2 - Correction de paroi 61
6.3 - Soufflerie à fréon 63

7 - ETUDE DE PROFILS AVEC ONDE DE CHOC 64

8 - POSSIBILITES D'EXTENSION 65

8.1 - Effet d'incidence 65
8.2 - Tuyères 66
8.3 - Système de révolution 66
8.4 - Cas du nombre de Mach supersonique à l'infini amont 68

CONCLUSION 69

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 70

Figures

Photographies

Tableaux

-=-=-=-=-=-=-

INTRODUCTION

NOTATIONS - Première partie

NOTATIONS - Deuxième partie

INTRODUCTION

La mise au point au Laboratoire d'Analogies Electriques de l'ONERA, d'éléments résistifs variables avec la tension appliquée à leurs bornes a permis d'étudier un certain nombre d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

C'est ainsi que l'équation de la diffusion $\Delta \varphi = \frac{1}{\alpha(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

(a = diffusivité thermique du matériau) a pu être traitée. Tout en conservant le caractère transitoire du phénomène, les éléments ont permis d'étudier un cas dans lequel la diffusivité est fonction de la température aussi facilement qu'il était possible de simuler un cas dans lequel la diffusivité est constante [1].

De même, la représentation analogique de l'équation $\Delta \varphi = e^{\varphi}$

qui intervient dans un cycle de calcul d'écoulement de plasma sans collision autour d'un obstacle, a permis de montrer les possibilités de cette méthode directe de calcul, qui, en évitant toute itération, supprime tous soucis de convergence [2].

Le but du présent travail est d'appliquer la méthode analogique à la recherche de solutions de l'équation mixte du type :

$$Q\,\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = S\,\frac{\varphi_x}{U}\,\varphi_{xx} \qquad (1)$$

dans laquelle Q et S sont des paramètres.

Elle peut encore s'écrire après le changement de variable -

$$y_1 = y\,S^{1/2} \qquad (2)$$

sous la forme :

$$\frac{Q}{S}\,\varphi_{xx} + \varphi_{y_1 y_1} = \frac{\varphi_x}{U}\,\varphi_{xx} \qquad (3)$$

La difficulté pour traiter une telle équation provient du changement de type.

En effet, suivant la région de l'espace considérée, le terme

$\frac{Q}{S} - \frac{\varphi_x}{U}$ est positif, négatif ou nul.

Si ce terme est positif, l'équation est de type elliptique.

S'il est négatif, l'équation est de type hyperbolique.

Ce changement est l'une des caractéristiques essentielles de l'équation qui peut, dans certaines conditions, faire apparaître simultanément dans le domaine étudié les deux zones citées ci-dessus séparées par une ligne correspondant au type parabolique pour lequel le terme $\frac{Q}{S} - \frac{\varphi_x}{U}$ est nul.

Le travail présenté est divisé en deux grandes parties :

- La simulation analogique de l'équation mixte du type :

$$A\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = S\frac{\varphi_x}{U}\varphi_{xx}$$

- L'application à l'équation des petites perturbations en écoulement transsonique.

Dans la première partie le premier chapitre permettra de donner les schémas de base de la représentation analogique et mettra en évidence la nécessité de réaliser un élément résistif variable avec la tension appliquée à ses bornes.

Les deux chapitres suivants seront consacrés à l'étude de l'élément non linéaire et à l'examen de sa stabilité électrique, indispensable lors de la mise au point de tout circuit actif.

La deuxième partie traitera de l'application de la méthode à l'équation des petites perturbations.

Après un bref rappel aérodynamique, les résultats obtenus, dans le cas du profil seul dans l'espace illimité, placé sans incidence, permettront, par comparaison avec des résultats d'origines diverses, de valider la méthode présentée.

Les chapitres suivants concerneront le très vaste domaine des applications de la méthode qui, ne comportant aucune itération, se révèle comme un outil de recherche très intéressant.

C'est ainsi qu'un chapitre sera consacré à l'étude d'écoulements autour de différents types de grilles d'aubes.

Les problèmes présents dans les souffleries seront ensuite abordés ; il sera montré en particulier qu'il est possible d'envisager un écoulement en présence de parois et de définir, pour M_o dans la veine, une valeur M'_o correspondant à un écoulement en domaine illimité tel que les répartitions des vitesses sur le profil en présence de parois ou en fluide illimité soient identiques.

En ce qui concerne les ondes de choc sur les profils, il convient de donner l'importance qu'il mérite au résultat suivant : une modification extrêmement petite de la forme du profil, correctement localisée, permet de faire disparaître l'onde de choc.

Au chapitre des possibilités d'extension de la méthode seront abordés, entre autres, le cas des tuyères, le problème du système de révolution et celui de l'écoulement supersonique à l'infini amont.

La conclusion rappellera les caractéristiques et l'originalité de la méthode.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

NOTATIONS - PREMIERE PARTIE

1 - GRANDEURS ELECTRIQUES DANS L'ANALOGIE

E	élément résistif non linéaire
ℓ	pas du découpage
$V, V_0, V_1 \ldots$	potentiels électriques
$i_1, i_2 \ldots$	courants
$R, R_1, R_2 \ldots$	résistances fixes
R'	résistance (cas $R_3 = R_4 = R'$)
R	résistance (cas $R_1 = R_2 = R$)
R_o	résistance de base du réseau
K	coefficient de passage $\frac{\varphi}{U} = KV$
ΔV_x	différence de potentiel entre deux noeuds consécutifs
R^*	résistance non linéaire $R^* = -\frac{2 R_o^{3/2}}{\Delta V_x}$
$\mathcal{f}$	indice caractérisant une grandeur sur une frontière
I_o	courant injecté
R_1^*	résistance non linéaire constituée par R^* et R mises en parallèle.

2 - GRANDEURS DANS L'ETUDE DE LA STABILITE

E_1, E_2	tensions dans un quadripole
I_1, I_2	courants dans un quadripole
K_i	gain en courant d'un NIC

K_v	gain en tension d'un NIC
$\mathcal{Z}$	impédance
R	résistance
$(R)_V$	résistance commandée en tension
$(R)_I$	résistance commandée en courant
R_i	résistance interne de source
R_{dyn}	résistance dynamique
$f(i,v)$	caractéristique courant-tension d'un élément résistif.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

NOTATIONS - DEUXIEME PARTIE

U_0 , U'_0	vitesses à l'infini amont et à l'infini aval
M_0	nombre de Mach à l'infini amont
ρ_0 , ρ'_0	masses volumiques à l'infini amont et à l'infini aval
(x, y, z)	espace physique (Ox dirigé selon la corde du profil)
(X, OY)	système d'axes utilisé dans l'étude des grilles : OY étant la direction de la vitesse d'entraînement de la roue
V_x , V'_x	projection de U_0 et U'_0 sur OX
V_x	vitesse sur laquelle est faite la linéarisation (grilles d'aubes)
M_*	nombre de Mach dans la linéarisation (grilles d'aubes)
$\Phi(x, y, z)$	potentiel aérodynamique
$\varphi(x, y, z)$	potentiel de perturbation
$U(x, y, z)$	vitesse complète
u', v', w'	composantes de U selon Ox, Oy et Oz
u, v, w	composantes de la vitesse de perturbation
$\rho(x, y, z)$	masse volumique
$p(x, y, z)$	pression
a	vitesse du son
M_ℓ	nombre de Mach local
C_p	coefficient de pression
γ	rapport des chaleurs spécifiques
C	corde du profil
e	épaisseur du profil

$k = \frac{e}{C}$	épaisseur relative du profil
α	angle d'incidence
θ	angle de sortie de la grille
δ	angle de déflexion de la grille
β	angle du front de grille avec OY
h	entreplan de la grille
$K_S = \frac{1 - M_0^2}{k^{2/3}}$	paramètre de similitude transsonique
M.C.	indice caractérisant le maître couple
L.S.	indice caractérisant la ligne sonique.

-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-

PREMIERE PARTIE

SIMULATION ANALOGIQUE DE L'EQUATION MIXTE DU TYPE :

$$A\,\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = S\,\frac{\varphi_x}{U}\,\varphi_{xx}$$

1 - INTRODUCTION

L'étude présentée ici, faite au réseau analogique est basée sur l'utilisation de l'élément résistif non linéaire (noté E).

Cet élément permet de représenter le terme $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ qui est du même ordre de grandeur que les termes linéaires simulés par des résistances fixes.

Après l'étude détaillée de la simulation analogique, mettant en évidence la nécessité d'une résistance non linéaire, l'élément E sera présenté, ses possibilités et son mode de réglage analysés.

Un chapitre important sera consacré à l'étude de la stabilité électrique du système, qui conditionne le développement de la méthode présentée.

Il sera montré en particulier, comment il peut être tiré parti de l'existence des deux types de convertisseur d'impédance négative (NIC commandé en tension ; NIC commandé en courant).

2 - REPRESENTATION ANALOGIQUE

2.1 - Simulation de l'équation

Considérons sur la figure 1 le domaine à l'intérieur duquel est défini le potentiel φ et découpons-le par un réseau de droites parallèles aux axes de référence et de pas commun ℓ .

En un point quelconque d'intersection de deux droites de ce réseau, et si ℓ est petit devant les dimensions du domaine, l'équation (3) peut se mettre sous la forme de différences finies :

$$\frac{\rho}{S}\left[\frac{\varphi_2-\varphi_0}{\ell}-\frac{\varphi_0-\varphi_1}{\ell}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{(\varphi_2-\varphi_0)^2}{U\ell^2}-\frac{(\varphi_1-\varphi_0)^2}{U\ell^2}\right]$$

$$+\frac{\varphi_3-\varphi_0}{\ell}+\frac{\varphi_4-\varphi_0}{\ell}=0 \qquad (4)$$

C'est sous cette forme que nous cherchons un analogue électrique en envisageant maintenant le réseau électrique constitué selon le schéma de la figure 2 dans lequel R_1, R_2, R_3 et R_4 sont des résistances fixes tandis que les E sont des éléments dont la caractéristique est parabolique (R^* caractérisée aussi par K^* : relation (5)).

Les lois de Kirchhoff, appliquées à un noeud quelconque du réseau, conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} V_1 - V_0 = R_1 i'_1 \\ V_0 - V_2 = R_2 i'_2 \\ V_3 - V_0 = R_3 i'_3 \\ V_4 - V_0 = R_4 i'_4 \\ i_1 = \dfrac{(V_1 - V_0)^2}{K^*} \quad \text{ou} \quad V_1 - V_0 = R^* i_1 \\ i_2 = \dfrac{(V_2 - V_0)^2}{K^*} \quad \text{ou} \quad V_2 - V_0 = R^* i_2 \\ \Sigma i = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{V_2 - V_0}{R_2} - \frac{V_0 - V_1}{R_1} - \frac{(V_2 - V_0)^2}{K^*} + \frac{(V_1 - V_0)^2}{K^*} + \frac{V_3 - V_0}{R_3} + \frac{V_4 - V_0}{R_4} = 0 \qquad (6)$$

Si l'on rapproche les équations (6) et (4), on constate qu'il est alors possible d'identifier $\frac{\varphi}{U}$ à V selon :

$$\frac{\varphi}{U} = K V \qquad (7)$$

A ce moment là, si R_0 est la résistance de base du réseau, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} R_3 = R_4 = R_0 \\ R_1 = R_2 = \dfrac{S}{Q} R_0 \\ R^* = - \dfrac{2 R_0^{3/2}}{K \Delta V_x} \end{cases} \qquad (8)$$

en posant $V_0 - V_{(i)_x} = \Delta V_x$

Le réseau analogique dans lequel le potentiel électrique V représente la grandeur : $\frac{\varphi}{U}$

est donc constitué de résistances fixes normales $R_3 = R_4 = R'$ et $R_1 = R_2 = R$ et d'une résistance R^* définie par la relation (8). On constate que cette résistance est une fonction de la tension ΔV_x appliquée à ses bornes.

Soit R^*_1 la résistance non linéaire formée par R^* et R_1 qui sont dans le plan courant-tension dont il sera fait usage par la suite.

Si $I_{R^*_1}$ est le courant circulant dans cette résistance lorsque la tension ΔV_x est appliquée à ses bornes, il vient :

$$I_{R_1^*} = - \frac{K}{2 R_0^{3/2}} (\Delta V_x)^2 + \frac{1}{R} (\Delta V_x) \qquad (9)$$

Il est donc nécessaire de construire une résistance dépendant de (ΔV_x) selon (9).

Le chapitre 3 de cette Première Partie est consacré à la description de cet élément résistif non linéaire.

2.2 - Conditions aux limites

Généralement les conditions auxquelles doit satisfaire φ en tout point du contour sont :

- soit des conditions de Dirichlet (φ donné)
- soit des conditions de Newman (dérivée normale imposée).

Dans le premier cas, la transposition est immédiate : le potentiel électrique doit être réglé selon la loi donnée.

Dans le second cas, il convient de définir l'analogue de $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ dans le réseau.

Pour cela, considérons la figure 3 sur laquelle l'indice f caractérise les éléments placés aux frontières du réseau et I_0 l'intensité injectée au noeud considéré.

Les lois de Kirchhoff permettent d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{(V_1 - V_0)^2}{K^*_f} \\ i_2 = \dfrac{(V_2 - V_0)^2}{K^*_f} \\ V_1 - V_0 = R_f\, i'_1 \\ V_0 - V_2 = R_f\, i'_2 \\ V_3 - V_0 = R_3\, i_3 \\ \Sigma i = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

On en déduit alors :

$$2\, I_0 + \frac{2\ell^2}{R_f}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{2\ell}{R'}\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\ell^2}{R'}\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} + 4\,\frac{\ell^3}{K^*_f}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \qquad (11)$$

d'où l'on tire :

$$\begin{cases} R_f = 2R \\ R^*_f = 2R^* \end{cases} \qquad (12)$$

$$I_0 = -\frac{\ell}{R' K U}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \qquad (13)$$

Les résistances placées aux frontières du réseau sont donc des résistances doubles tandis que le courant injecté au noeud est relié à la dérivée normale par (13) dans laquelle y_1 est défini par la relation (2).

2.3 - Présentation du réseau analogique

Finalement le réseau que l'on peut voir sur les photographies 1 et 2 est constitué selon le schéma de la figure 4.

Le domaine spatial représenté est suffisamment grand pour que les effets d'images soient négligeables.

Les conditions aux limites, traduites dans le cas présent par des injections d'intensités sont appliquées sur 9 noeuds. Compte tenu que, par raison de symétrie, un demi-espace seulement a été représenté, les dimensions sont les suivantes :

- 115 mailles selon la direction Ox
- 50 mailles selon la direction Oy

En chaque noeud sont placées les résistances R', R et R^* (R^*_1 est la notation de R et R^* mises en parallèle).

L'étude faite au paragraphe 2.1 montre que seule la résistance R dépend des paramètres Q et S de l'équation.

Ainsi donc pour modifier ces valeurs il suffira de changer toutes les résistances fixes horizontales, R^* étant un élément résistif variable choisi une fois pour toutes. La caractéristique courant-tension $I = f(\Delta V_x)$ de l'élément R^*_1 est une parabole (figure 4) dépendant de la valeur des paramètres Q et S par l'intermédiaire de la résistance R.

2.4 - Système de visualisation

Un système électronique (Photographies 3, 4 et 5), que nous allons décrire, permet, au cours des réglages, de suivre en permanence les modifications apportées aux valeurs des conditions aux limites, ainsi que celles qui en résultent aussi bien sur le potentiel φ que sur le gradient φ_x

Le principe du système est de visualiser sur un oscilloscope grand écran, un certain nombre de différences de potentiel, par commutation électronique.

La grandeur visualisée peut être, soit un potentiel référencé à la masse, soit une différence de potentiel entre deux points du réseau.

Les injections de courants sont faites en maintenant des potentiels aux pieds des résistances reliées aux différents points d'injections sur le réseau. Les grandeurs visualisées sont les différences de potentiels qui existent aux bornes de ces résistances.

2.5 - Dépouillement des résultats

Ne disposant que de 40 points de visualisation, il était indispensable de les utiliser à la frontière du réseau sur laquelle sont appliquées les conditions aux limites.

Si ce système est irremplaçable pour effectuer le réglage des conditions aux limites, il est bien certain que la précision de l'ordre du pour cent est insuffisante dans bien des cas. D'autre part, certains problèmes exigent la connaissance du champ complet des potentiels. C'est pourquoi, l'uti-

lisation d'un voltmètre numérique cinq chiffres permet de terminer avec précision le réglage des conditions aux limites et d'effectuer les relevés de potentiel dans tout le domaine.

Il est alors facile d'en déduire toute grandeur désirée.

Il faut également signaler que, dans un but de développement de la méthode, un dispositif de relevé automatique peut être envisagé.

3 - ELEMENT NON LINEAIRE

3.1 - Introduction

Le paragraphe précédent a montré qu'il est indispensable de posséder des éléments résistifs non linéaires pour traiter l'équation de type mixte envisagée.

La résistance qui a été mise au point en vue de réaliser cette évolution fonction de la tension appliquée à ses bornes, est constituée uniquement de diodes et de résistances.

D'une façon plus générale, cet élément, qui est présenté sous une forme programmable, permet de réaliser des variations aussi bien croissantes que décroissantes, ce qui lui donne un très grand nombre d'applications.

3.2 - Principe et fonctionnement

Considérons donc l'élément E constitué selon le schéma de la figure 5 par une série de résistances et une chaîne de diodes ayant une tension de seuil V_s . Les résistances ont une borne commune entre elles tandis que la deuxième borne d'une résistance de rang (n) est reliée à celle de rang (n - 1) à travers une diode.

Au fur et à mesure que la tension entre la borne commune aux résistances et la borne de masse augmente, les diodes D_1, D_2, D_3 .... D_n deviennent passantes.

Ainsi donc, au début seule la résistance R_o est en circuit et lorsque la tension aux bornes de D_1 atteint la valeur du seuil V_s de la diode, la résistance R_1 est commutée en parallèle sur R_o.

L'accroissement de la différence de potentiel appliquée à l'entrée de l'élément mettra successivement en circuit chacune des résistances R_1, R_2, R_3, ... R_n.

Nous avons donc réalisé une résistance qui diminue lorsque la tension à ses bornes augmente.

Si chaque diode pouvait être schématisée par une résistance passant de la valeur R infinie à la valeur R directe pour la valeur V_s, il serait possible de calculer de façon simple les valeurs des résistances R_n nécessaires pour réaliser l'évolution souhaitée de la résistance en fonction de la tension.

Or, il n'existe pas de seuil nettement déterminé et le passage de R infinie à R directe s'effectue dans une plage de tension non négligeable autour de la valeur V_s.

Par contre, la présence du coude dans cette région de la diode a l'avantage de donner une caractéristique courant-tension de l'ensemble de l'élément E qui ne présente aucune cassure, alors qu'une caractéristique idéale de diode aurait donné pour l'élément E une courbe i = f (V) définie par des segments de droite (fig. 6).

Ainsi donc, nous voyons qu'il est nécessaire d'effectuer un réglage expérimental de cet élément, afin de prendre en compte non seulement la résistance directe de chaque diode et la variation rapide de la résistance de la diode dans la zone du coude, mais aussi et surtout la dispersion des caractéristiques d'un type donné de diode autour d'une valeur moyenne.

Avant d'expliquer comment s'effectue pratiquement le réglage d'un tel élément, les différents types de caractéristiques que l'on peut réaliser vont être présentés.

3.3 - Différents types de caractéristiques

3.3.1 - Introduction

On peut noter immédiatement que deux grands types de caractéristiques courant-tension peuvent être déterminés. La figure 7 donne quelques exemples de ces éléments.

Une autre classification que nous retrouverons ultérieurement (chapitre 4) peut être introduite : Elle est basée sur le signe de la pente locale de la caractéristique i = f (V). On définit alors la résistance dynamique $\frac{dV}{di}$ (figure 8).

$\frac{dV}{di} > 0$ caractérise des résistances positives linéaires ou non linéaires.

$\frac{dV}{di} < 0$ caractérise des résistances négatives.

3.3.2 - Résistance positive variable

Le fonctionnement décrit sur la figure 5 conduit à des caractéristiques courant-tension du type 1 sur la figure 9.

L'élément peut également travailler avec des tensions négatives puisque, en inversant l'élément, on obtient la caractéristique 2 symétrique de 1 par rapport à l'origine.

Ces deux éléments peuvent être montés tête-bêche pour réaliser une caractéristique symétrique ou non par rapport à l'origine.

Ces deux montages réalisent des résistances décroissantes lorsque la valeur absolue de V croît.

La figure 10 donne l'exemple d'une résistance qui varie dans un rapport 10.

Considérons maintenant le montage correspondant à la caractéristique 3 sur la figure 9.

Supposons que la tension au point A augmente à partir du potentiel zéro. Au début le point A sera plus négatif que B : toutes les diodes seront conductrices et une résistance équivalente à R_o, R, ... R_n en parallèle sera en circuit. Au fur et à mesure que la tension augmente au point A la tension en A et B diminue et successivement les résistances R_n, R_{n-1} ... sont mises hors circuit.

Ainsi la résistance globale vue entre les points A et B augmente lorsque V croît.

La figure 9 donne un résumé de l'ensemble de caractéristiques possibles de l'élément décrit.

Signalons également que le montage de la figure 11 permet d'obtenir une translation des caractéristiques dans la direction de l'axe courant.

3.3.3 - Résistance négative variable

L'utilisation de l'élément non linéaire dans un montage du type Convertisseur d'Impédance négative (qui sera présenté dans le chapitre 4) a permis d'obtenir des résistances négatives non linéaires.

Une première réalisation donnée par la figure 12 montre l'association d'une résistance positive variable pour les tensions positives et d'une résistance négative variable pour les tensions négatives, la caractéristique étant $i = kV^2$.

Le deuxième exemple est celui nécessaire à l'analogie de l'équation de type mixte traitée (fig. 13).

La caractéristique est du type : $i = av^2 + bv$.

3.4 - Réalisation pratique des éléments E

Différentes réalisations, permettant des modes de réglages différents, ont été envisagées.

Finalement, un système utilisant du matériel "Sealectro" a été retenu.

La diode de commutation 1N914 (seuil de l'ordre de 0,5 volt), qui permet de réaliser un élément plus compact, a été préférée au transistor monté en diode, qui donne une résistance directe très légèrement inférieure à celle de la diode (Ce montage peut s'avérer intéressant dans certains cas très limités qui n'ont jamais été rencontrés).

La figure 14 montre l'élément sur lequel peuvent être enfichées les diodes et les résistances réalisant la variation souhaitée.

Trois résistances sont utilisées en parallèle pour constituer chacune des résistances R_o, ... R_n . Le nombre de diodes maximum est 14.

La résistance r servant à mesurer l'intensité (paragraphe "Réglage") peut également être placée sur l'élément.

Les diodes et les résistances sont soudées sur des fiches qui réalisent des contacts dans deux plans différents (fig. 15).

Les éléments E sont enfichables , la dimension entre axes étant de 19 mm.

L'encombrement est de 45 mm x 45 mm sur la face enfichable, la longueur étant égale à 120 mm.

3.5 - Réglage de l'élément E

3.5.1 - Principe

Le réglage de chaque élément E s'opère à partir de la comparaison sur un oscilloscope grand écran, à deux voies, de l'intensité $i(V) = \frac{V}{R(V)}$ circulant dans la résistance variable et de la courbe référence $i = g(V)$ qui est programmée sur un générateur de fonction.

3.5.2 - Réglage

Sur le schéma de la figure 16, est donné le principe de l'ensemble permettant la visualisation de la courbe $i = f(V)$ et la comparaison avec la courbe référence $i = g(V)$.

Sur la figure 17 sont reproduits quelques oscillogrammes concernant certains points intéressants du montage.

Le fonctionnement s'effectue à partir d'une tension en dents de scie qui, d'une part attaque l'élément à régler à travers une résistance de faible valeur permettant la mesure de l'intensité et, d'autre part, commande le balayage de l'oscilloscope.

Sur la deuxième voie est visualisée la courbe référence programmée sur un générateur de fonction synchronisé avec la dent de scie.

Cette fonction est définie par soixante pas juxtaposés et de niveaux réglables, entre 0 et 255 par unité.

Cette courbe de comparaison étant représentée par une suite de pas (fig. 18) et la caractéristique $i = f(V)$ de l'élément en cours de réglage étant continue (à cause de la présence du coude dans les caractéristiques de diode : voir 3.2) il est difficile de faire une excellente comparaison. C'est pourquoi il a été adjoint un dispositif permettant de moduler la tension de Wehnelt de telle sorte qu'il n'apparaîsse sur l'écran de l'oscilloscope qu'une série de points correspondant au centre de chacun des pas du générateur de fonction.

Le réglage d'un élément diodes-résistances E s'effectue en ajustant les valeurs des différentes résistances R_n le constituant de telle façon que la caractéristique $i = f(V)$ se superpose à la courbe référence (fig. 19).

Ce réglage est rapide car la mise en circuit d'une résistance se fait à partir du moment où la diode devient passante. Il en résulte donc une modification de $i = f(V)$ seulement pour les tensions supérieures à celle pour laquelle R_n est mise en circuit.

Nous terminerons ces indications concernant le réglage des éléments non linéaires en insistant sur la rapidité du système et en signalant qu'un tel procédé à l'avantage d'éliminer les erreurs dues à la dispersion des caractéristiques des diodes.

Le réglage du premier élément d'une série identique sera évidemment le plus long à réaliser : en effet lorsque ce réglage sera fait, la

connaissance des valeurs des différentes résistances permettra de réaliser très rapidement tous les éléments qui ne nécessiteront alors qu'un contrôle et éventuellement une retouche à l'aide du système de visualisation.

3.5.3 - Système de visualisation

3.5.3.1 - Horloge (fig. 20)

L'oscillateur est un oscillateur à quartz de type classique fonctionnant à partir d'une tension d'alimentation de 5 volts. Toute cette partie a été réalisée à partir de circuits intégrés.

L'impulsion de cadence ainsi obtenue a une amplitude de 5 volts nécessaire pour le fonctionnement du générateur S.A.I.P. servant à programmer la courbe référence i = g (V).

D'autre part, ce générateur exige des impulsions de déclenchement dont la fréquence f est liée à celle des impulsions de cadence par la relation $f \leqslant \frac{F}{600}$

Pour cela une division par 500 a été réalisée à l'aide de décades en circuits intégrés SN7490N.

Une division par 1 000 est obtenue après le bistable formé par T_4 et T_5.

L'impulsion a alors une amplitude de 10 volts indispensables pour le fonctionnement du générateur de fonction.

C'est à partir de cette impulsion qu'est formée la dent de scie de tension.

3.5.3.2 - Modulation du Wehnelt

Nous avons vu que, pour améliorer la précision du réglage, il était intéressant de "marquer" le centre de chaque pas définissant la courbe i = g (V).

Rappelons tout d'abord que chaque pas de la fonction correspond à 10 impulsions de cadence.

Le décodage de la cinquième impulsion a été fait à l'aide des portes deux entrées du circuit SN7400N et de la porte quatre entrées SN7420N (fig. 18 et 20).

Le monostable de la figure 21 constitué des transistors 2N2222 forme une impulsion de 12 volts d'amplitude, d'une durée de 1,5 µs qui permet de moduler convenablement le Wehnelt.

3.5.3.3 - Dents de scie (fig. 22)

La dent de scie est obtenue par un montage classique à savoir par la charge d'une capacité à courant constant. L'amplitude obtenue dans des conditions normales d'utilisation, pour une durée de 2 ms, est de 12 volts.

3.5.4 - Précision

Il a été indiqué précédemment qu'une courbe référence est programmée sur un générateur de fonction. Rappelons que cette courbe est définie par 0 pas de niveau réglable entre 0 et 255.

Afin de déterminer la précision que l'on peut espérer, une caractéristique de forme parabolique $i = 10^{-4} V^2$ a été réalisée.

Pour cela, la parabole a été programmée sur le générateur de fonction suivant les valeurs données par le tableau 1.

Le réglage de l'élément E a ensuite été réalisé comme cela a été décrit précédemment.

Nous avons enfin effectué les mesures du courant et de la tension en alimentant l'élément E par une source de tension continue (fig. 23).

Le tableau 2 donne ces résultats et la comparaison avec les valeurs théoriques désirées.

On constate que ce réglage conduit à une précision meilleure que le % de la valeur, sauf pour les faibles valeurs de tension.

Ainsi pour V = 1 volt :

$$\frac{I_{\text{théorique}} - I_{\text{réalisé}}}{I_{\text{théorique}}} = 2\ \%$$

Mais si on considère la précision pour la pleine échelle :

$$\frac{I_{\text{théorique}} - I_{\text{réalisé}}}{(I_{\text{max}})_{V = 7\ V}} = 0{,}04\ \%$$

Un essai de précision a également été effectué sur la caractéristique courant-tension d'un élément programmé selon $i = kV^2$ constitué par l'assemblage d'une résistance variable positive et d'une résistance variable négative. Le tableau 3 donne les résultats de ce réglage expérimental.

Il convient de noter que l'utilisation combinée du réglage à l'aide de deux voltmètres et du système de visualisation permet d'obtenir, en peu de temps, des éléments d'une grande précision.

C'est ainsi qu'a été réglé le premier élément parabolique nécessaire au traitement de l'équation mixte envisagée, les suivants étant ajustés par comparaison avec cet élément témoin.

4 - ETUDE DE LA STABILITE

4.1 - Introduction

Dans les chapitres 2 et 3, il a été montré qu'il faut disposer d'une résistance négative variable avec la tension appliquée à ses bornes pour traiter l'équation mixte envisagée.

Le premier paragraphe de ce chapitre montrera que le montage qu'il faut utiliser pour réaliser cette résistance négative est un circuit actif.

Or, la mise au point de tels circuits doit comporter une étude de la stabilité puisque ce sont les instabilités qui limitent leur utilisation.

Il est donc important, du point de vue électronique et dans l'hypothèse d'applications futures des éléments variables dans le domaine des équations non linéaires, d'approfondir le phénomène d'instabilité électrique qui se manifeste sur le réseau analogique présenté.

C'est pourquoi, la stabilité sera traitée théoriquement dans le cas d'un réseau purement résistif qui fonctionne à des fréquences ne justifiant pas l'introduction de self inductances et de capacités.

Les résultats obtenus seront comparés à ceux que donnent certaines réalisations.

4.2 - Circuit actif : NIC

4.2.1 - Définition

Un convertisseur d'impédance négative (N I C) est un quadripole qui possède la propriété suivante : l'impédance vue d'un côté est égale à l'impédance connectée de l'autre côté, changée de signe.

Cette transformation négative peut être obtenue de deux façons :

Soit le quadripole (fig. 24) défini par :

$$\begin{cases} E_2 = Kv\ E_1 \\ I_2 = -\ Ki\ I_1 \end{cases}$$

Kv et Ki caractérisant le gain en tension et le gain en courant.

- Si $Kv > 0$ et $K_i < 0$

on définit un convertisseur idéal d'impédance négative par inversion du courant (I.N.I.C.).

- Si $Kv < 0$ et $K_i > 0$

on définit un convertisseur idéal d'impédance négative par inversion de la tension (V.N.I.C.).

4.2.2 - Propriété

Considérons le cas d'une impédance Z_2 branchée selon le schéma de la figure 25.

On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_2 = K_v E_1 \\ I_2 = - K_i I_1 \\ E_2 = - Z_2 I_2 \end{cases}$$

d'où l'on déduit $Z_e = \frac{E_1}{I_1} = Z_2 \frac{K_i}{K_v}$

L'impédance vue de l'entrée est donc égale à $\frac{K_i}{K_v}$ fois l'impédance branchée à la sortie.

De la même façon (fig. 26) si Z_1 est connectée à l'entrée, on définit l'impédance vue de la sortie par :

$$Z_s = \frac{E_2}{I_2} = \frac{K_v}{K_i} Z_1$$

Qu'il s'agisse d'un VNIC ($K_v < 0$, $K_i > 0$) ou d'un INIC ($K_v > 0$, $K_i < 0$) les impédances Z_e et Z_s sont négatives, si Z_1 et Z_2 sont positives.

4.2.3 - Exemple de réalisation

Un INIC peut être réalisé selon le schéma de la figure 27 en utilisant un amplificateur opérationnel comme élément actif.

La différence de potentiel aux bornes de R_1 est égale à celle mesurée aux bornes de R_2. On a alors :

$$E_1 = E_2 \text{ et } I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1$$

qui sont les équations caractérisant un INIC de gains :

$$K_v = 1 \text{ et } - K_i = \frac{R_1}{R_2}$$

Envisageons sous quelle condition ce montage est stable dans l'hypothèse où toutes les résistances utilisées sont des résistances constantes.

L'écriture des équations du paragraphe précédent suppose que la différence de potentiel entre les entrées e^+ et e^- de l'amplificateur opérationnel soit nulle ce qui n'est pas rigoureusement le cas dans la réalité.

Soit le schéma équivalent de la figure 28, et les résistances R_a et R_b respectivement connectées à l'entrée et à la sortie.

(k est le gain de l'amplificateur).

La différence de potentiel $E_2 - E_1$ ne doit jamais être positive même si elle est très petite. Si elle devient positive la contre réaction introduite par les résistances entraîne la saturation de l'amplificateur.

La condition est donc :

$$E_1 \geqslant E_2$$

c'est-à-dire :

$$\frac{R_a}{R_1 + R_a} \geqslant \frac{R_b}{R_b + R_2}$$

et dans le cas où $R_1 = R_2$:

$$R_a \geqslant R_b$$

est nécessaire pour obtenir la stabilité.

Vu de l'entrée, le montage est dit stable en circuit ouvert (S.C.O) ou commandé en courant.

Vu de la sortie, le montage est dit stable en court-circuit (S.C.C) ou commandé en tension.

4.3 - Etude théorique de la stabilité

L'élément non linéaire E décrit au chapitre 3 peut être introduit dans un NIC pour réaliser une résistance négative variable. Dans ce cas l'étude de la stabilité doit être complétée;tel est le but des paragraphes suivants.

4.3.1 - Critère de stabilité

Dans ce paragraphe il est fait rappel de notions que donne L.O. CHUA [6] qui traite abondamment de ce problème dans son livre "Introduction to non linear Network theory".

Un système physique est dit en équilibre si la solution est indépendante du temps.

Les états d'équilibre correspondant à l'équation $\frac{dx}{dt} = f(x)$, dans laquelle x est la variable d'état, sont donnés par les solutions de $f(x) = o$.

Graphiquement, il s'agit des points d'intersection de f (x) avec l'axe ox. Considérons la courbe f (x) de la figure 29. Pour déterminer la stabilité de chaque état d'équilibre P_i il est nécessaire d'examiner le voisinage de chacun de ces points en accord avec la définition de Liapunov. Cela consiste à perturber la variable x de $\mathcal{E}$ vers la droite puis vers la gauche et d'observer la trajectoire à partir de ce nouvel état initial.

Si les trajectoires qui correspondent à chacun de ces deux nouveaux états reviennent vers le point P_i : l'équilibre de P_i est stable.

Si l'une des deux perturbations (ou les deux) conduit à s'éloigner de P_i, l'équilibre est instable.

Considérons d'abord le point P_1.

Introduisons la perturbation $\mathcal{E}_1$ qui le conduit du point $x = k_1$ à $x = k_1 + \mathcal{E}_1$ au temps $t = t_o$. Etudions la nature de la solution $x = X(t)$ avec $X(t_o) = k_1 + \mathcal{E}_1$ comme état initial. A ce point là, $f(x) = f(x_1 + \mathcal{E}_1)$ est positif.

Comme il doit satisfaire $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $\frac{dx}{dt}$ est positif.

Donc la solution, $x = X(t)$ partant de $x(t_o) = k_1 + \mathcal{E}_1$ est une fonction croissante du temps à partir de $t = t_o$ et le sens de la trajectoire sera dirigé vers la droite de P_1 qui est donc instable.

Un raisonnement analogue pour les autres points de la figure 29 montre que seuls P_2 et P_6 sont stables.

Le Critère de Stabilité est alors le suivant :

soit $\frac{dx}{dt} = f(x)$ l'équation d'un réseau du premier ordre,

soient P_i $(x = k_i)$ les états d'équilibre.

P_i est stable si, dans un intervalle autour de $x = k_i$, f (x) est monotone et décroissante en x. Sinon P_i est instable.

Corollaire. Si la pente de f (x) est différente de zéro pour un état d'équilibre P_i :

P_i est stable si la pente de f (x) au point P_i est négative.

P_i est instable si la pente est positive.

4.3.2 - Application du cas $i = av^2 + bv$. Corollaires du critère de stabilité

Il a été montré précédemment l'existence du point de vue de la stabilité de deux types de résistances :

- résistance stable en court circuit ou commandée en tension notée $(R)_V$
- résistance stable en circuit ouvert ou commandée en courant noté $(R)_I$

Considérons sur la figure 30 le tableau de fonctionnement de ces deux types de résistances lorsqu'elles sont attaquées par des générateurs

...

parfaits de courant et de tension.

Les zones de stabilité des deux types de résistance montre que leurs caractéristiques sont rigoureusement complémentaires, le point de raccordement correspond au sommet de la parabole où :

$\frac{d\,(i_R)}{d\,v_R}$ est infinie (ainsi que la résistance de la source de courant).

Envisageons maintenant, selon les schémas de la figure 31, les sources de courant et de tension présentant une résistance interne R_i.

Cette étude peut être ramenée à celle du cas précédent en envisageant les éléments non linéaires R_p et R_s définis sur la figure 31 attaqués par des sources idéales.

On démontre alors que le point de raccordement des zones de stabilité des caractéristiques des éléments (R_V) et (R_I) se trouve placé au point C tel que :

$$(Rdyn)_C = - R_i$$

Ce point C correspond aux points D sur R_s et E sur R_p.

En effet, pour une attaque en courant selon le schéma de la figure 31 b/

$$i_R = a v_R^2 + b v_R$$

$$v_R = R_p I = I \frac{R_i}{1 + R_i a v_R + b R_i}$$

$$I = \frac{1}{R_i}\left[v_R (1 + b R_i) + R_i a v_R^2\right]$$

$$\frac{dI}{dv_R} = \frac{1}{R_i} + 2 a v_R + b = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{R_i} = - \frac{1}{R_{dyn}}$$

De la même façon on montre que le point D, extrêmum en V_R de la caractéristique R_s correspond au point C sur R.

Corollaires du critère de stabilité

Définition du point de repos :

C'est le point de fonctionnement de la caractéristique, (défini par i_o et v_o) lorsque l'élément n'est branché à aucune source.

$(R)_V$ a un point de repos défini par $i_o = 0$ et $v_o = 0$

$(R)_I$ a un point de repos tel que $i_o = 0$ et $v_o = v_A$

(voir figure 31 a/).

Corollaire 1

Soit un élément défini par f (i,v) attaqué par une source de résistance interne R_i.

On peut toujours connaître la caractéristique F (i;v) de l'ensemble constitué par l'élément non linéaire étudié et la résistance de source.

Un élément commandé tension (ou S.C.C.) est stable dans la partie de sa caractéristique comprise entre le point de repos et le potentiel v_c défini par $\frac{dF_v}{di_R} = o$.

Un élément commandé en courant (ou S.C.O.) est stable dans la partie de sa caractéristique comprise entre le point de repos et le courant i_c défini par $\frac{dF_i}{dv_R} = o$.

Corollaire 2

Les éléments commandés en tension présentent des caractéristiques complémentaires, du point de vue de la stabilité, de celles des éléments commandés en courant.

4.4 - Etude expérimentale de la stabilité

4.4.1 - Introduction

Comment se manifeste l'instabilité sur le réseau analogique ?

Pour un découpage donné du domaine, envisageons le cas dans lequel les conditions aux limites sont réduites à neuf injections d'intensités.

Si l'on augmente progressivement les valeurs de ces intensités, de façon à obtenir des valeurs de plus en plus élevées de $\frac{\partial V}{\partial x}$ on peut distinguer trois types de réglages aux limites assez floues.

a) - Il n'y a tout d'abord aucune espèce de difficulté pour régler très rapidement les injections d'intensités aux valeurs désirées.

b) - Dans une zone pour laquelle les intensités ont des valeurs supérieures, il est plus difficile de respecter les bonnes injections aux différents noeuds. L'ordre du réglage a sans aucun doute une influence prépondérante. Les valeurs désirées peuvent cependant être obtenues.

c) - Enfin, toujours dans la même configuration du réseau, il existe des valeurs d'intensités plus élevées que les précédentes pour lesquelles le réseau est instable : Ceci se traduit par l'apparition, quasi instantanée, en cours de réglage, de tensions voisines des tensions d'alimentation des éléments non linéaires qui se trouvent alors portés en saturation.

A la lumière de l'étude théorique précédente concernant la stabilité, le phénomène peut s'expliquer simplement de la façon suivante :

Le réseau n'utilise que des éléments non linéaires commandés en tension.

Si un tel élément $(R_1^*)_V$ est supposé isolé de l'ensemble, le réseau restant et ses conditions aux limites constituent, pour lui, une source d'impédance interne inconnue.

Lors de l'affichage des injections d'intensité, les paramètres de cette source évoluent de telle façon que sa résistance interne ne répond plus à la condition de stabilité vis-à-vis de la résistance dynamique au point de fonctionnement sur la caractéristique de R^*_1.

Il semblerait alors tout indiqué de remplacer l'élément instable par son élément complémentaire défini précédemment. Telle est l'orientation de l'étude envisagée.

Ce changement s'étant révélé impossible, une autre solution, moins élégante, a cependant permis de rétablir la stabilité.

4.4.2 - Stabilité de différents types NIC

Parmi les nombres NIC utilisés trois sont présentés sur la figure 32.

Il faut également signaler la réalisation d'un NIC universel (gain en courant et gain en tension réglables séparément) dont le schéma n'est pas reproduit.

Le NIC noté A de cette figure est celui qui a été utilisé dans le réseau.

Les notations de cette figure sont les suivantes :

Lorsqu'une impédance Z est branchée entre les points 1 et 2, l'impédance $-Z$ vue entre les points 2 et 3 est du type "commandée en courant".

Lorsqu'une impédance Z est connectée entre les points 2 et 3, l'impédance $-Z$ vue entre les points 1 et 2 est du type "commandée en tension".

Les essais ont consisté à attaquer ces différents circuits soit par un générateur de courant soit par une source de tension d'impédance R_i en vue de relier le phénomène d'instabilité à R_i. Les valeurs choisies de R_i sont 2 kΩ, 5 kΩ, et 10 kΩ.

La figure 33 montre la comparaison entre les prévisions théoriques et les relevés expérimentaux dans le cas où R_i = 2 kΩ. La coïncidence se révèle bonne mais les éléments ne sont pas rigoureusement complémentaires

...

puisqu'il existe une zone de 100 mV répartie autour du point de raccordement théorique.

Sans entrer dans le détail des différents circuits, on peut dire que les montages utilisés présentaient assez peu de différence du point de vue de la complémentarité.

Ce défaut dû aux capacités parasites exigerait une étude beaucoup plus approfondie pour espérer obtenir une amélioration.

4.4.3.1 - Bien que la zone de 100 mV autour du point de raccordement n'autorise que peu d'espoir de pouvoir rétablir la stabilité en remplaçant dans le réseau un élément $(R^*_1)_V$ qui se révèle instable par un élément $(R^*_1)_I$ l'essai a été effectué.

L'ordre de branchement des alimentations des résistances négatives, leurs phénomènes transitoires au moment de la mise sous tension ne font qu'accentuer les difficultés. Un système de commutation faisant passer progressivement de $(R^*_1)_V$ à $(R^*_1)_I$ n'a pas obtenu plus de succès.

4.4.3.2 - Solution adoptée

A la fin du chapitre 4.4.1 un élément commandé en tension a été isolé du réseau ; l'ensemble restant (réseau + conditions aux limites) constitue la source qui attaque cette résistance.

Si on modifie cette source, en ajoutant par exemple une source de tension de résistance interne nulle aux bornes de l'élément isolé, la source ainsi obtenue aura une impédance inférieure à celle qu'elle avait précédemment.

Le point C de la figure 31 sera déplacé vers des potentiels plus positifs : le phénomène d'instabilité sera alors moins limitatif dans le traitement du problème.

Les éléments devenant instables sont relativement faciles à localiser.

L'adjonction, dans ces zones, de sources de tension a permis d'améliorer la stabilité.

Cependant, comme ces sources ne représentent pas de conditions aux limites du problème physique, il faut que les potentiels imposés soient solutions du problème. Pour que cette condition soit satisfaite le courant débité par chacune de ces sources doit être nul.

Il s'agit là du critère qui permet le réglage par itération.

Il faut cependant signaler que le nombre de sources sera peu important puisque l'effet de stabilisation ainsi introduit est sensible sur une zone non négligeable autour du point considéré. Dix sources est un nombre admissible pour réaliser la convergence sans difficulté.

Remarquons que dans l'étude des grilles de profils, présentée ultérieurement, aucune instabilité n'est apparue ; on peut expliquer ce fait par la présence au contour de sources de tension (correspondant ici aux conditions aux limites) qui ont un effet stabilisant.

4.5 - Conclusion

La stabilité a été améliorée en introduisant quelques sources de tension dans les zones particulièrement instables.

Dans le cas où ces sources ne représentent aucune condition du problème physique, il y a lieu d'effectuer quelques itérations de réglage.

Il faut signaler cependant que cette difficulté deviendrait tout à fait mineure dans l'hypothèse d'un couplage du réseau à un ordinateur.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION A L'EQUATION DES PETITES PERTURBATIONS EN ECOULEMENT TRANSSONIQUE

1 - INTRODUCTION

L'application envisagée pour mettre en évidence les possibilités de la méthode exposée dans la première partie est le traitement de l'équation des petites perturbations en régime transsonique.

En effet, dans ce cas l'équation (1) prend la forme :

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=M_0^2(1+\gamma)\frac{1}{U_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \qquad (14)$$

dans laquelle φ est le potentiel de perturbation aérodynamique, M_0 la valeur du nombre de Mach à l'infini amont et γ le rapport des chaleurs spécifiques.

Il convient de rappeler et de préciser la difficulté majeure du traitement de cette équation :

Si $1-M_0^2\left[1+\frac{\gamma+1}{U_0}\varphi_x\right]$ est positif, l'équation est elliptique : l'écoulement est subsonique.

Si ce terme est négatif, l'équation est hyperbolique : l'écoulement est supersonique.

S'il est nul, l'équation est parabolique : l'écoulement est sonique.

En régime transsonique, les trois types existent simultanément.

Il résulte de ces difficultés que, malgré une abondante littérature, peu nombreuses sont les méthodes qui semblent capables de traiter cette équation en régime transsonique ; en particulier dans le cas où il existe une onde de choc.

Jusqu'à présent deux d'entre elles peuvent être retenues :

- Magnus, Gallaher, Yoshihara [10] qui traitent les équations complètes, donnent des résultats pour un profil biconvexe de 8,4 % d'épaisseur relative lorsque le Mach à l'infini est 0,850.

  Les calculs exigent deux heures sur CDC 6400.

- Murman et Cole [11] et actuellement Murman et Krupp [12] qui traitent l'équation des petites perturbations.

  Les calculs, pour un profil représenté par 40 points, exigent 400 itérations et 40 minutes de travail sur IBM 360/44.

Au cours du premier chapitre traitant du profil seul dans l'espace illimité, les résultats obtenus seront confrontés et permettront de valider la méthode proposée.

Les chapitres suivants traiteront du problème des grilles d'aubes et de certains problèmes de souffleries.

Les possibilités d'extension de la méthode seront envisagées.

2 - RAPPELS AERODYNAMIQUES

2.1 - Equation des petites perturbations

L'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u') + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v') + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w') = 0 \qquad (15)$$

permet d'écrire, en supposant l'écoulement irrotationnel,

$$\Delta \Phi + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \qquad (16)$$

p étant fonction de ρ seul, les termes tels que $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$ peuvent s'écrire :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{a^2} \qquad \text{avec} \qquad a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

En tenant compte des équations d'Euler (17) pour un fluide parfait :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{du'}{dt} = \rho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \dfrac{dv'}{dt} = \rho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \dfrac{dw'}{dt} = \rho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \qquad (17)$$

et en négligeant les forces de volume, il vient :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{du'}{dt} = -\left(\frac{\partial u'}{\partial x}u' + \frac{\partial u'}{\partial y}v' + \frac{\partial u'}{\partial z}w'\right) \qquad (18)$$

En remplaçant dans l'équation (16) on obtient, pour le potentiel Φ une équation aux dérivées partielles non linéaire (19)

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\left[1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\left[1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] \qquad (19)$$

$$+ \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\left[1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\frac{1}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$2\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\frac{1}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\frac{1}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$$

Si l'on suppose que la vitesse V autour de l'obstacle reste voisine de la vitesse à l'infini U_0 (c'est-à-dire que les vitesses de perturbations sont faibles), on peut écrire que le potentiel Φ est la somme d'un potentiel $U_0 x$ donnant une vitesse uniforme parallèle à l'axe Ox et d'un potentiel de perturbation $\varphi(x, y, z)$

$$\Phi = U_0 x + \varphi(x, y, z) \qquad (20)$$

Les vitesses de perturbations :

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (21)$$

sont considérées comme des infiniment petits.

On obtient alors l'équation suivante :

$$a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\left(U_0+u\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$+\left(U_0+u\right)v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+vw\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad (22)$$

$$+\left(U_0+u\right)w\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

où a^2 peut être exprimé à partir de l'équation de l'énergie :

$$\frac{\left(U_0+u\right)^2+v^2+w^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{U_0^2}{2}+\frac{a_0^2}{\gamma-1} \qquad (23)$$

$$a^2=a_0^2-\frac{\gamma-1}{2}\left(2uU_0+u^2+v^2+w^2\right)$$

et dans le cas bidimensionnel on peut écrire :

$$\left(1-M_0^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=$$

$$M_0^2\left[\left(\gamma+1\right)\frac{u}{U_0}+\frac{\gamma+1}{2}\frac{u^2}{U_0^2}+\frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{U_0^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+M_0^2\left[\left(\gamma-1\right)\frac{u}{U_0}+\frac{\gamma+1}{2}\frac{v^2}{U_0^2}+\frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{U_0^2}\right]\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (24)$$

$$+M_0^2\left[\frac{v}{U_0}\left(1+\frac{u}{U_0}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\cdots\right]$$

Si $\frac{u}{U_0}$ et $\frac{v}{U_0}$ sont petits, les termes du deuxième ordre peuvent être négligés.

Lorsque M_0 tend vers 1, le terme $M_0^2\left(\gamma+1\right)\frac{u}{U_0}\frac{\partial u}{\partial x}$ ne peut être abandonné car il est du même ordre de grandeur que $\left(1-M_0^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}$

Dans cette hypothèse l'équation (24) s'écrit :

$$(1-M_0^2)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=M_0^2(\gamma+1)\frac{u}{U_0}\frac{\partial u}{\partial x}$$

soit encore, en exprimant le potentiel de perturbation :

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=M_0^2\frac{\gamma+1}{U_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \qquad (25)$$

En effectuant le changement de variable selon (2) c'est-à-dire

$$y_1 = y\,M_0(\gamma+1)^{1/2} \qquad (26)$$

on obtient l'équation :

$$\frac{1-M_0^2}{M_0^2(1+\gamma)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}=\frac{1}{U_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \qquad (27)$$

2.2 - <u>Coefficient de pression</u>

Il est défini par :

$$C_p=\frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2}=\frac{2}{\gamma M_0^2}\left(\frac{p}{p_0}-1\right) \qquad (28)$$

Pour un écoulement isentropique il peut s'exprimer sous la forme :

$$C_p=\frac{2}{\gamma M_0^2}\left\{\left[\frac{2+(\gamma-1)M_0^2}{2+(\gamma-1)M_\ell^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1\right\} \qquad (29)$$

ou :

$$C_p = -\left[2\frac{u}{U_0} + (1-M_0^2)\frac{u^2}{U_0^2} + \frac{v^2+w^2}{U_0^2}\right] \qquad (30)$$

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, si les termes d'ordre égaux ou supérieurs à deux peuvent être négligés :

$$C_p = -\frac{2u}{U_0} \qquad (31)$$

2.3 - Condition de choc

Considérons un fluide en écoulement adiabatique et soit une onde de choc Δ stationnaire. Les indices 1 et 2 concernent les différentes grandeurs respectivement avant et après le choc.

Les équations sont les suivantes :

- continuité $$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = m \qquad (32)$$

- conservation de l'énergie $$\frac{U_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{U_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2} \qquad (33)$$

- conservation de la quantité de mouvement $$m(U_2-U_1) = p_1 - p_2 \qquad (34)$$

Dans le cas d'un gaz parfait, pour une onde de choc normale le système ci-dessus se réduit à la relation de Prandtl.

$$U_1 U_2 = a_c^2 \qquad (35)$$

En faisant apparaître les vitesses de perturbation, on obtient :

$$\frac{u_1 u_2}{U_0^2} + \frac{u_1+u_2}{U_0} = \frac{a_c^2}{U_0^2} - 1 = \frac{1}{M_c^2} - 1$$

comme $$M_c^2 = \frac{(\gamma+1)M_0^2}{2+(\gamma-1)M_0^2}$$

$$\frac{u_1+u_2}{U_0} + \frac{u_1 u_2}{U_0^2} = 2\frac{1-M_0^2}{M_0^2(1+\gamma)} \qquad (36)$$

qui relie les vitesses de perturbation de part et d'autre de l'onde choc.

Si le produit $u_1 u_2$ peut être négligé la relation (36) devient :

$$\frac{u_1}{U_0} + \frac{u_2}{U_0} = 2\,\frac{1-M_0^2}{M_0^2\,(1+\gamma)} \qquad (37)$$

3 - COMPLEMENTS A L'ANALOGIE

Nous pouvons résumer les résultats importants des chapitres précédents :

$$\frac{\varphi}{U_0} = K\,V \qquad (7)$$

d'où il découle :

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_x}{U_0} = \dfrac{u}{U_0} = \dfrac{K}{\ell}\,\Delta V_x & (38) \\[2ex] \dfrac{\varphi_y}{U_0} = \dfrac{v}{U_0} = \dfrac{K}{\ell}\,M_0\,(1+\gamma)^{1/2}\,\Delta V_y & (39) \end{cases}$$

qui fournissent les valeurs u et v des composantes de la vitesse de perturbation.

D'autre part, on sait que les valeurs du nombre de Mach local et du coefficient de pression sont données par :

$$\begin{cases} M_\ell^2 = M_0^2\left[1 + (\gamma+1)\,\dfrac{\varphi_x}{U_0}\right] & (40) \\[2ex] C_p = -2\,\dfrac{u}{U_0} & (41) \end{cases}$$

c'est-à-dire en tenant compte des grandeurs analogiques :

$$\begin{cases} M_\ell^2 = M_0^2\left[1 + (\gamma+1)\,\dfrac{K}{\ell}\,\Delta V_x\right] & (42) \\[2ex] C_p = -2\,\dfrac{K}{\ell}\,\Delta V_x & (\ ) \end{cases}$$

3.1 - Points particuliers de la parabole

Il convient à partir de la relation (42) de définir les positions sur la parabole de certaines valeurs particulières du nombre de Mach local.

- $u = 0$ c'est-à-dire $\Delta V_x = 0$ et $(M_\ell)_o = M_o$

correspond au point de la parabole situé à l'origine des axes (fig. 34).

- Le sommet de la parabole correspond à la valeur unité du nombre de Mach local, et au type parabolique de l'équation. La valeur de la vitesse de perturbation est déduite de :

$$(\Delta V_x)_{L.S.} = \frac{\ell}{K} \frac{1 - M_o^2}{M_o^2 (1+\gamma)} \qquad (44)$$

- Le point A (fig. 34) présente une valeur de Mach local très simple

$$(M_\ell)_A^2 = 2 - M_o^2 \quad \text{et} \quad (\Delta V_x)_A = 2(\Delta V)_{L.S.}$$

Au cours des différentes expériences, ces valeurs particulières ont permis de suivre facilement l'allure générale de l'écoulement.

3.2 - Représentation du choc

Dans l'hypothèse du choc droit, s'il se produit une discontinuité de vitesse localisée au noeud O de la figure 35, on peut écrire la relation suivante :

$$I_o + \frac{\ell}{R'} \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\ell^2}{2R'} \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$$

$$+ \frac{\ell}{R_\ell} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{o1} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{o2} \right] + \frac{\ell^3}{K^*_\ell} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{o1}^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{o2}^2 \right] = 0 \qquad (45)$$

Comme il a été établi que :

$$I_o = - \frac{\ell}{R'} \frac{\partial V}{\partial y_1}$$

Si $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{01}$ est différent de $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{02}$, il reste

$$\frac{K^*_g}{\ell R_g} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{01} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{02} = 0 \qquad (46)$$

c'est-à-dire :

$$\left(\Delta V_x\right)_1 + \left(\Delta V_x\right)_2 = 2\frac{\ell}{K}\,\frac{1-M_0^2}{M_0^2(1+\gamma)} \qquad (47)$$

Si la relation (47) est rapprochée de l'équation (37) liant les vitesses de part et d'autre de la discontinuité de vitesses, il apparaît qu'aucune condition supplémentaire n'est nécessaire dans la représentation analogique.

Le choc doit se développer de façon tout à fait naturelle, sans aucune intervention, ni itération, si bien que le réseau est apte à donner des solutions avec onde de choc.

3.3 - Correspondance analogie-aérodynamique

3.3.1 - De quelle grandeur aérodynamique le courant électrique $I^*_{R_1}$ est-il l'analogue ?

L'équation du courant électrique $I^*_{R_1}$ donnée par la relation (9) peut être précisée de la façon suivante :

$$I_{R_1^*} = -\frac{K}{2R_0^{3/2}}\left(\Delta V_x\right)^2 + \frac{1}{R}\left(\Delta V_x\right) \qquad (9)$$

$$I_{R_1^*} = \frac{1}{K\ell}\left[\frac{1-M_0^2}{M_0^2(1+\gamma)}\,\frac{u}{U_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{U_0}\right)^2\right]$$

Considérons maintenant le développement de $\frac{\rho U}{\rho_0 U_0}$ donné par :

$$\frac{\rho U}{\rho_0 U_0} = 1 + \left(1-M_0^2\right)\frac{U-U_0}{U_0} - \frac{1}{2}\left(1-M_0^2\right)\frac{U_0}{a_c-U_0}\left(\frac{U-U_0}{U_0}\right)^2$$

Compte tenu que $\frac{a_c - U_0}{U_0} = \frac{1 - M_0^2}{M_0^2 (1+\gamma)}$

en posant $\frac{u}{U_0} = \frac{U - U_0}{U_0}$ on obtient :

$$\frac{\rho U - \rho_0 U_0}{\rho_0 U_0} = \left(1 - M_0^2\right)\frac{u}{U_0} - \frac{1}{2} M_0^2 (1+\gamma)\left(\frac{u}{U_0}\right)^2$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\rho U - \rho_0 U_0}{M_0^2 (1+\gamma)\rho_0 U_0} = \frac{1 - M_0^2}{M_0^2 (1+\gamma)}\frac{u}{U_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{U_0}\right)^2$$

qui n'est autre que l'équation donnée par $I_{R_1}^*$

Donc finalement :

$$\begin{cases} \Delta V_x = \dfrac{\ell}{K}\dfrac{u}{U_0} = \dfrac{\ell}{K}\dfrac{U - U_0}{U_0} \\ I_{R_1^*} = \dfrac{1}{K\ell}\left[\dfrac{\rho U - \rho_0 U_0}{M_0^2 (1+\gamma)\ \rho_0 U_0}\right] \end{cases}$$

3.3.2 - Envisageons maintenant de quelles grandeurs aérodynamiques les résistances statique et dynamique de R^*_1 sont les analogues (fig. 34).

On sait que :

$$R_{stat} = \frac{\Delta V_x}{I_{R_1^*}}$$

$$R_{dyn} = \frac{d(\Delta V_x)}{d\ I_{R_1^*}}$$

Ces deux résistances s'expriment alors :

$$\frac{1}{R_{stat.}} = \frac{1}{R'_0} \frac{\frac{\rho U - \rho_0 U_0}{\rho_0 U_0}}{\frac{U - U_0}{U_0}}$$

$$\frac{1}{R_{dyn.}} = \frac{1}{R'_0} \frac{d}{d\,\frac{U-U_0}{U_0}} \left(\frac{\rho U - \rho_0 U_0}{\rho_0 U_0} \right)$$

avec $R'_0 = R_0 M_0^2 (1+\gamma)$

Les résistances $R_{stat.}$ et $R_{dyn.}$ ne sont donc que les inverses de pseudo-masses volumiques.

L'examen de ces grandeurs ainsi que celui des puissances électriques mises en jeu dans le réseau ne semblent pas apporter d'élément nouveau.

Il est cependant intéressant de noter que la résistance statique caractérise le point courant par rapport aux grandeurs prises à l'infini amont, tandis que la résistance dynamique (qui intervient dans la stabilité électrique) traduit une caractérisation locale.

3.3.3 - Conclusion

La simulation analogique adoptée peut être résumée de la façon suivante :

$$\Delta V_x \longrightarrow \frac{u}{U_0} = \frac{\text{vitesse de perturbation}}{\text{vitesse à l'infini}}$$

$$I_{R_1^*} \longrightarrow \frac{\rho U - \rho_0 U_0}{\rho_0 U_0} = \frac{\text{masse de perturbation}}{\text{masse à l'infini}}$$

$$\frac{1}{R_{stat.}} \longrightarrow \frac{\text{masse de perturbation/masse à l'infini}}{\text{vitesse de perturbation/vitesse à l'infini}}$$

$$\frac{1}{R_{dyn.}} \longrightarrow \frac{d\,(\text{masse de perturbation/masse à l'infini})}{d\,(\text{vitesse de perturbation/vitesse à l'infini})}$$

Il faut également noter que la dérivée de la masse de perturbation par rapport à la vitesse de perturbation est positive, négative ou nulle suivant que l régime est subsonique, supersonique ou sonique.

Dans le cas où il existe une onde de choc, il convient d'examiner, non plus la dérivée de la masse de perturbation par rapport à la vitesse de perturbation, mais le rapport entre le saut de masse de perturbation et le saut de vitesse de perturbation à travers l'onde de choc.

Les relations (36) et (47) conduisent à dire que ce rapport est nul.

3.4 - Visualisation

Le bloc diagramme de la figure 36 précise le système de visualisation décrit dans la première partie.

On remarquera en particulier que l'intégration des intensités, représentant la pente locale du profil, permet de restituer sur l'écran de l'oscilloscope la forme même du profil et de suivre en permanence son évolution.

4 - PROFIL SYMETRIQUE SEUL DANS L'ESPACE

Trois types de profil ont été examinés. Il s'agit des profils lenticulaires, losangiques et elliptiques, mais c'est essentiellement sur le premier type que l'étude a été faite : c'est, en effet, pour ces profils lenticulaires qu'existe le plus grand nombre de points de comparaison d'origines très diverses.

Le profil NACA 0012 a permis un rapprochement avec des essais de soufflerie pour une valeur du nombre de Mach à l'infini égale à 0,742, c'est-à-dire très voisine de celle du Mach critique.

4.1 - Réalisation du réseau

Dans ce cas, l'équation traitée est rigoureusement celle donnée par (27) la linéarisation étant faite sur la vitesse U_0 à l'infini.

Les expressions des éléments résistifs définies précédemment par (8) prennent les formes suivantes :

$$\begin{cases} R_3 = R_4 = R_0 \\ R_1 = R_2 = \dfrac{M_0^2(1+\gamma)}{1-M_0^2} R_0 \\ R^* = -\,2\dfrac{R_0^{3/2}}{K\,\Delta V_x} \end{cases} \qquad (48)$$

La figure 37 montre l'allure des caractéristiques courant-tension de l'élément R^*_1 pour différentes valeurs de M_o.

D'autre part, des résistances doubles sont placées aux frontières du réseau, tandis que le courant injecté est relié à la dérivée normale selon la relation (13).

Ainsi, dans le cas de l'effet d'épaisseur traité, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ est nul sur la frontière, à l'extérieur du profil, tandis que, sur le profil lui-même, la condition de glissement permet d'écrire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f'_x$$

L'injection d'intensité prend alors la valeur :

$$I_o = -\frac{\ell}{R' K U_o} \frac{1}{M_o (1+\gamma)^{1/2}} f'_x \qquad (49)$$

4.2 - Profils lenticulaires

L'étude a été faite en prenant comme paramètres l'épaisseur k du profil et la valeur M_o du Mach à l'infini.

C'est ainsi que la figure 38 reproduit les répartitions du coefficient de pression à $M_o = 0{,}742$ pour des profils de différentes épaisseurs.

Pour cette valeur de M_o, les trois profils sont entièrement subsoniques mais les coefficients de pression obtenus présentent un écart assez important, avec les résultats obtenus en théorie linéarisée.

La figure 39 reproduit les évolutions de la valeur du Mach local lorsque $M_o = 0{,}790$.

On peut constater que cette valeur du Mach à l'infini est le Mach critique inférieur pour le profil d'épaisseur 10 % tandis que le profil 12 % présente une zone supersonique qui s'étend sur 25 % environ de la corde.

Toutes ces répartitions sont pratiquement symétriques par rapport au maître couple.

La figure 40 montre le tracé des lignes "iso-Mach local" dans le voisinage immédiat du profil.

Remarquons que la ligne iso-Mach correspondant à la valeur du Mach à l'infini est perpendiculaire à la vitesse à l'infini.

Sur la figure 41 sont tracées deux répartitions correspondant à des profils de 6 % et 8 % d'épaisseurs relatives pour $M_o = 0{,}821$.

L'évolution obtenue sur le profil 6 % peut être rapprochée de celles obtenues par Michel, Marchaud et Le Gallo [42] pour un Mach à l'infini de 0,815 et par Knechtel pour $M_o = 0{,}817$.

Si on doit considérer qu'il existe un écart non négligeable entre les résultats obtenus au réseau et ceux données par Michel, Marchaud et Le Gallo, on peut dire que compte tenu de l'écart qui existe entre les valeurs

...

du Mach à l'infini, il y a un bon accord avec Knechtel. (Voir aussi fig. 46).

La figure 42 montre des répartitions de Mach plus élevées que les précédentes puisque le Mach à l'infini est 0,866.

Avec l'augmentation d'épaisseur, la dissymétrie s'accentue, devient très nette pour le profil de 5,32 % tandis que la répartition obtenue pour le profil 6,35 % met en évidence l'apparition de l'onde de choc (fig. 43).

Remarquons également que le profil 4,25 % admet cette valeur de M_o comme Mach critique.

Enfin (fig. 44) il a été obtenu deux répartitions pour des profils lenticulaires de 5,3% et 6,16 % à $M_o = 0,897$.

Le premier présente une évolution très fortement dissymétrique, tandis que le deuxième fait apparaître une variation très rapide de la vitesse, c'est-à-dire une onde de choc.

Pour ce dernier cas la figure 45 reproduit le tracé des lignes iso-Mach.

La zone supersonique est déjà très importante puisqu'elle s'étend sur 50 % environ de la corde dans la direction Ox et sur 45 % de la corde dans la direction Oy.

Pour terminer cette étude sur des profils lenticulaires il y a lieu de se reporter aux figures 46 et 47 qui fournissent des comparaisons avec des résultats de calcul et des résultats de soufflerie.

La grandeur choisie pour ces comparaisons est la valeur du Mach local au maître-couple $(M_\ell)_{M.C.}$.

La figure 46 donne, pour différentes valeurs du Mach à l'infini, les valeurs du Mach local au maître couple de quatre profils d'épaisseurs 6 %, 8 %, 10 % et 12 %.

Il a été placé également sur cette figure deux points obtenus par le calcul :

- l'un pour un profil 6 %, obtenu par Kenzie et Moretti [21]. Ce point s'aligne bien sur la courbe obtenue au réseau analogique,

- le deuxième obtenue par Magnus, Gallaher et Yoshihara [10] pour un profil de 8,4 % semble bien se situer par rapport au profil 8 % traité au réseau.

La figure 46 reproduit également plusieurs résultats obtenus en soufflerie :

- ceux, cités précédemment (fig. 41) de Michel, Marchaud et Le Gallo,

- celui de Knechtel et un troisième obtenu à la soufflerie de l'E N S A pour un profil de 8 %.

La figure 47 donne un autre type de comparaison : il s'agit du coefficient de pression au maître couple obtenu au réseau analogique et par le calcul dans la troisième approximation d'Asaka [13].

Les résultats obtenus en théorie linéarisée sont notés tandis que ceux donnés par la deuxième approximation développée par Hantzche et Wendt

...

n'ont pas été reproduits sur cette figure.

La dernière comparaison possible est celle qui peut être faite avec les résultats donnés par Murman et Cole [11].

L'équation que traitent Murman et Cole n'est pas exactement identique à celle envisagée jusqu'ici. Elle s'écrit :

$$(1-M_o^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = (1+\gamma)\frac{\varphi_x}{U_o}\varphi_{xx}$$

Murman et Cole posent $M_o^2 = 1$ dans le terme du second membre. Ils introduisent le paramètre de similitude transsonique $K_S = \frac{1-M_o^2}{k^{2/3}}$

et trouvent comme valeur critique de ce paramètre (pour des profils lenticulaires) $K_{cr.} \simeq 2{,}45$.

La comparaison porte sur le cas d'un profil d'épaisseur 6 % (fig. 48).

L'équation traitée au réseau fournit $K_{cr.} = 1{,}95$. Mais en dépouillant les résultats électriques du réseau de façon à représenter la même équation, nous trouvons $K_{cr.} = 2{,}30$ qui est donc une valeur voisine de celle que trouvent Cole et Murman.

4.3 - Profils losangiques

Les figures 49 et 50 concernent les profils losangiques de 4 %, 6 % et 8 % d'épaisseurs relatives.

La définition du profil par neuf points d'injections seulement, utilisée jusqu'à présent, est insuffisante pour connaître avec précision les répartitions des vitesses au voisinage de la singularité du maître couple.

Cependant, les résultats présentés n'ont nécessité que peu de temps et permettent, sur un réseau très simplifié, de se faire une idée assez nette des résultats que l'on peut s'attendre à trouver.

4.4 - Profils elliptiques

Pour la valeur $M_o = 0{,}790$ (fig. 51) les quatre profils de 6 %, 8 %, 10 % et 12 % sont entièrement subsoniques.

A égalité d'épaisseur et de Mach à l'infini avec les profils lenticulaires, ces profils présentent des valeurs de Mach locaux moins élevées et l'ensemble de la répartition de vitesses forme une courbe beaucoup plus aplatie. Il convient de rappeler que, même pour ces répartitions subsoniques, il existe un écart assez important avec les résultats que l'on obtiendrait en théorie linéarisée.

Les quatre profils ci-dessus ont été étudiés à $M_o = 0,821$ (fig. 52).

Seul le profil 12 % présente une zone supersonique.

De la même façon que sur les profils lenticulaires, dans le cas où les Mach locaux sont légèrement supérieurs à l'unité, les répartitions sont pratiquement symétriques.

Les lignes "isomach" (fig. 53) permettent d'étudier le champ aérodynamique autour du profil.

Une dernière série de résultats donnés sur la figure 54 met en évidence l'apparition de la dissymétrie au fur et à mesure que les vitesses deviennent plus importantes.

4.5 - Etude du NACA 0012

Bien que la théorie des petites perturbations ne s'applique qu'à des profils à bords d'attaque pointus, le profil NACA 0012 qui présente une tangente verticale au bord d'attaque a été étudié au voisinage du Mach critique (fig. 55).

Le résultat obtenu pour un Mach à l'infini de 0,742 est comparé à celui tiré d'une note NACA pour $M_o = 0,75$ et à celui obtenu dans la soufflerie transsonique à paroi perméable de l'ONERA pour $M_o = 0,736$ [45].

La confrontation est très favorable puisque, hormis un écart normal et prévisible au voisinage du bord d'attaque, la courbe obtenue au réseau analogique se situe presque parfaitement entre les deux tracés de comparaison sur 90 % environ du profil.

5 - ECOULEMENT AUTOUR D'UNE GRILLE D'AUBES

Une contribution à l'important problème des grilles d'aubes est apportée dans ce chapitre.

Il a semblé intéressant de proposer deux types de linéarisation possibles.

La première a été faite sur la grandeur $\rho_o V_x$ (fig. 57) (V_x n'étant pas la vitesse à l'infini amont).

Elle exige un développement théorique afin de préciser :

- comment est obtenue l'équation de type mixte de la forme (1),
- quelles sont les conditions à maintenir aux limites du réseau.

La deuxième possibilité est basée sur une linéarisation sur $\rho_o U_o$

Dans ce cas, les conditions aux limites sont plus simples à réaliser.

L'équation est celle donnée par (27).

5.1 - Etude théorique

Considérons sur les figures 56 et 57 l'écoulement isentropique

...

et permanent d'un fluide parfait et compressible autour d'une grille d'aubes d'entreplan h .

Soit $x\,O\,y$ le système d'axes tel que Ox soit parallèle à la corde du profil et $X\,O\,Y$ celui dans lequel OY est collinéaire à la direction du front de grille.

β sera la notation de l'angle que forme la direction de front de grille avec la normale à la corde du profil.

La périodicité du champ des vitesses permet de limiter la représentation du potentiel au domaine ABCD.

5.1.1 - Grandeur de linéarisation

Le principe de conservation de la masse permet d'écrire :

$$\int_{AB} \rho_0 \vec{V}_x \vec{n}_0 \, ds = \int_{DC} \rho'_0 \vec{V}'_x \vec{n}'_0 \, ds = c^{te}$$

c'est-à-dire :

$$h \rho_0 V_x = h \rho'_0 V'_x = c^{te} \qquad (50)$$

Or (fig. 57)

$$\rho_0 V_x = \rho_0 V_x \cos\beta = \rho_0 U_0 \cos(\alpha+\beta)$$

$$\rho'_0 V'_x = \rho'_0 V'_x \cos\beta = \rho'_0 U'_0 \cos(\theta+\beta)$$

On en déduit alors :

$$\rho_0 V_x = \rho'_0 V'_x \qquad (51)$$

C'est autour de cette grandeur $\rho_0 V_x$ qu'est effectuée la linéarisation.

5.1.2 - Equation traitée dans la linéarisation

L'équation fondamentale de l'écoulement peut s'écrire sous la forme :

$$a^2 \Delta\phi = \text{grad}\,\phi \;\text{grad}\,\frac{U^2}{2} \qquad (52)$$

dans laquelle a est la vitesse du son, Φ le potentiel et $\sqcup$ la vitesse.

Il s'agit d'exprimer l'équation (52) dans l'hypothèse des petites perturbations, afin de la ramener à une équation de la forme (1).

En posant :

$$\Phi(x,y) = V_x x + \varphi(x,y) \qquad (53)$$

où φ est le potentiel de perturbation on peut écrire :

$$\sqcup^2 = V_x^2 + 2uV_x + u^2 + v^2 \qquad (54)$$

En outre l'équation de l'énergie donne :

$$a^2 = a_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}\left[\sqcup_0^2 - \sqcup^2\right] = a_*^2 + \frac{\gamma-1}{2}\left[V_x^2 - \sqcup^2\right] \qquad (55)$$

On obtient alors, après avoir abandonné les termes de deuxième ordre :

$$a^2 = a_*^2 - (\gamma-1) V_x \varphi_x \qquad (56)$$

L'équation (52) devient :

$$\left[a_*^2 - (\gamma-1)\varphi_x V_x\right](\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) = V_x^2 \varphi_{xx} + 2V_x \varphi_x \varphi_{xx}$$

En négligeant le terme $V_x(\gamma-1)\varphi_x\varphi_{yy}$ devant $a_*^2 \varphi_{yy}$ il reste :

$$a_*^2 \varphi_{xx} - V_x^2 \varphi_{xx} + a_*^2 \varphi_{yy} = (\gamma+1)\varphi_x \varphi_{xx} \qquad (57)$$

soit encore, en posant : $M_* = \frac{V_x}{a_*}$

$$(1 - M_*^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = M_*^2(\gamma+1)\frac{\varphi_x}{V_x}\varphi_{xx} \qquad (58)$$

Cette équation est de la forme de celle traitée dans la Première Partie.

Il convient de noter que la valeur du nombre de Mach M_* est reliée au Mach à l'infini M_0 selon :

$$M_*^2 = \frac{V_x^2}{a_*^2} = \frac{V_x^2}{a_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}\left(U_0^2 - V_x^2\right)}$$

Or $$V_x = U_0 \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} \qquad (59)$$

donc :

$$M_*^2 = \frac{V_x^2}{a_0^2\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\left(1 - \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta}\right)\right]}$$

c'est-à-dire :

$$M_*^2 = \frac{M_0^2 \ \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\left(1 - \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta}\right)} \qquad (60)$$

5.1.3 - Expression du Mach local

$$M_l^2 = \frac{U^2}{a^2} = \frac{\frac{U^2}{V_x^2}}{\frac{a^2}{V_x^2}} \qquad (61)$$

Le rapport $\frac{U^2}{V_x^2}$ s'exprime, en fonction de la vitesse u de perturbation, suivant :

$$\frac{U^2}{V_x^2} = \frac{V_x^2 + 2uV_x}{V_x^2} = 1 + \frac{2u}{V_x}$$

tandis que $$a^2 = a_*^2 + \frac{\gamma-1}{2}\left(V_x^2 - U^2\right) \qquad (55)$$

La relation (61) s'écrit alors :

$$M_\ell^2 = \frac{1 + \dfrac{2u}{V_x}}{\dfrac{a_*^2}{V_x^2} + \dfrac{\gamma-1}{2}\left(1 - \dfrac{U^2}{V_x^2}\right)}$$

$$M_\ell^2 = M_*^2 \left\{ 1 + \left[2 + (\gamma-1) M_*^2\right] \frac{u}{V_x} \right\} \qquad (62)$$

soit encore :

$$M_\ell^2 = M_*^2 \left[1 + (\gamma+1) \frac{u}{V_x} \right] \qquad (63)$$

5.1.4 - Expression du coefficient de pression

Il est défini par :

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2} = \frac{2}{\gamma M_0^2}\left(\frac{p}{p_0} - 1\right) \qquad (64)$$

L'équation de l'énergie donne :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0}\right) = \frac{1}{2}\left(U_0^2 - U^2\right)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0}\right) = \frac{1}{2}\left(U_0^2 - V_x^2 - 2uV_x\right) \qquad (65)$$

En introduisant le fait que l'écoulement est isentropique, c'est-à-dire que :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{66}$$

le rapport $\frac{p}{p_0}$ s'écrit :

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{\gamma}{2} M_0^2 \left(1 - \frac{V_x^2}{U_0^2}\right) - \gamma M_0^2 \frac{V_x}{U_0^2} u \tag{67}$$

Le coefficient de pression s'écrit alors :

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_0^2}\left[\frac{\gamma}{2} M_0^2 \left(1 - \frac{V_x^2}{U_0^2}\right) - \gamma M_0^2 \frac{V_x}{U_0^2} u\right]$$

c'est-à-dire :

$$C_p = 1 - \frac{V_x^2}{U_0^2} - \frac{2 u V_x}{U_0^2} \tag{68}$$

ou bien :

$$C_p = 1 - \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta} - 2\frac{u}{V_x}\frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta} \tag{69}$$

5.1.5 - Conditions aux limites

*A l'infini amont dans le système d'axes xOy les composantes de la vitesse de perturbation s'expriment selon :

$$\begin{cases} u_0 = (\varphi_x)_0 = U_0 \sin\alpha \simeq U_0 \alpha \\ v_0 = (\varphi_y)_0 = U_0 \alpha \operatorname{tg}\beta \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \dfrac{u_o}{V_x} = \alpha \, tg\, \beta \, \dfrac{\cos \beta}{\cos(\alpha+\beta)} & (70) \\ \dfrac{v_o}{V_x} = \alpha \, \dfrac{\cos \beta}{\cos(\alpha+\beta)} & (71) \end{cases}$$

On établit également :

$$\begin{cases} \varphi_x = 0 \\ \varphi_y = \dfrac{U_o \sin \alpha}{\cos \beta} \end{cases} \quad (72)$$

*A l'infini aval : les composantes de la vitesse de perturbation s'expriment suivant :

$$\begin{cases} v'_o = U'_o \sin \theta \\ u'_o = U'_o \cos \theta - V'_x \end{cases}$$

Or :

$$\rho_o V_x \cos \beta = \rho'_o U'_o \cos(\theta+\beta) \quad (51)$$

$$U'_o = \frac{\rho_o}{\rho'_o} V_x \frac{\cos \beta}{\cos(\theta+\beta)}$$

Les composantes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{u'_o}{V_x} = \dfrac{\rho_o}{\rho'_o} \left(\dfrac{\cos\beta \cos\theta}{\cos(\theta+\beta)} - 1 \right) \\ \dfrac{v'_o}{V_x} = \dfrac{\rho_o}{\rho'_o} \dfrac{\cos\beta \sin\theta}{\cos(\theta+\beta)} \end{cases} \quad (73)$$

Or, il a été vu au chapitre II.2 que :

$$\frac{\rho'_o(V_x+u'_o)-\rho_o V_x}{\rho_o V_x} = \left(1-M_*^2\right)\frac{u'_o}{V_x} - \frac{1}{2}M_*^2(\gamma+1)\left(\frac{u'_o}{V_x}\right)^2$$

En écrivant la même relation avec ρ_o et u_o étant donné que $\frac{u_o}{V_x}$ et $\frac{u'_o}{V_x}$ sont petits devant l'unité, on déduit que :

$$\frac{\rho'_o}{\rho_o} = \frac{1+\left(1-M_*^2\right)\frac{u'_o}{V_x}}{1+\left(1-M_*^2\right)\frac{u_o}{V_x}} \quad \frac{1+\frac{u_o}{V_x}}{1+\frac{u'_o}{V_x}} \qquad (74)$$

*La condition de glissement du fluide sur le profil s'écrit :

$$\vec{U}.\vec{n} = 0$$

or $$\vec{U} = \overrightarrow{grad}\,\phi = (V_x+\varphi_x)\vec{x} + \varphi_y \vec{y}$$

En se plaçant dans le cas d'un profil mince, peu courbé sur l'axe Ox on établit que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f'_x$$

*La condition de Kutta-Joukowsky traduit au bord de fuite l'égalité des pressions à l'extrados et à l'intrados du profil.

En utilisant l'équation de l'énergie, et en tenant compte de l'isentropicité de l'écoulement, on montre que la condition est réalisée lorsque :

$$\left(\frac{\varphi_x}{V_x}\right)_{\text{extrados}} = \left(\frac{\varphi_x}{V_x}\right)_{\text{intrados}}$$

5.2 - Représentation analogique

Les différentes conditions à réaliser aux limites du réseau sont reproduites sur le diagramme de la figure 58.

Le réseau est limité au domaine ABCD dans lequel AB et CD sont considérés comme l'infini amont et l'infini aval.

5.2.1 - Pour réaliser la conservation de la masse il convient d'injecter à l'infini amont le courant I_1 et à l'infini aval le courant I'_1 de façon à réaliser l'égalité:

$$\rho_0 (V_x + u_0) - \rho_0 \frac{v_0}{tg\,\beta} = \rho'_0 (V'_x + u'_0) - \rho'_0 \frac{v'_0}{tg\,\beta}$$

déduite de la relation (51)

et dans laquelle u_0 est la vitesse de perturbation suivant Ox à l'infini amont par rapport à la vitesse V_x, u'_0 et u''_0 les vitesses de perturbation, suivant Ox à l'infini aval par rapport à V'_x et à V_x (fig. 57).

On sait d'après le chapitre 3.3 que :

$$i_x = \frac{\rho_0 (V_x + u_0) - \rho_0 V_x}{K \ell\, M_0^2 (1+\gamma)\ \rho_0 V_x} \qquad (75)$$

i_x et i_y étant les courants à l'infini amont, i'_x et i'_y les courants à l'infini aval

l'égalité $I_1 = I'_1$ c'est-à-dire :

$$i_x - i_y = i'_x - i'_y \quad \text{s'écrit}$$

$$\frac{\rho_0 (V_x + u_0) - \rho_0 V_x}{\rho_0 V_x} - \frac{\rho_0 v_0}{tg\beta\ \rho_0 V_x} = \frac{\rho'_0 (V_x + u''_0) - \rho_0 V_x}{\rho_0 V_x} - \frac{\rho'_0 v'_0}{tg\,\beta\ \rho_0 V_x} \qquad (76)$$

Or $$\rho_0 V_x = \rho'_0 V'_x$$

et $$V_x + u''_0 = V'_x + u'_0$$

On obtient donc la relation de conservation de la masse écrite précédemment.

5.2.2 - En amont des profils, en désignant par φ^- et φ^+ les valeurs de φ aux points E' et E situés en vis à vis et distants de h, la circulation due à la vitesse de perturbation est égale à la différence

Compte tenu de la relation (71), on peut écrire :

$$\varphi^- - \varphi^+ = h \frac{U_0 \sin\alpha}{\cos\beta} \qquad (77)$$

D'autre part, dans chaque section telle que EE', la condition de conservation de débit de l'écoulement général exige que, dans l'écoulement de perturbation, le flux traversant une telle section soit nul, c'est-à-dire que $\Psi_E = \Psi_{E'}$ en désignant par Ψ la fonction de courant.

Analogiquement, ces deux conditions s'expriment par le maintien entre les points E et E' d'une différence de potentiel égale à :

$$(\delta V)_{oy} = K h \frac{U_o \alpha}{\cos \beta} \qquad \text{suivant} \quad oy$$

c'est-à-dire dans le plan analogique :

$$(\delta V)_{oy_1} = \frac{K n \ell \cos \beta_a \; U_o \alpha}{M_o (1+\gamma)^{1/2} \cos^2 \beta} \qquad (78)$$

les courants entrant en E et sortant en E' étant égaux.

Plusieurs montages permettent de réaliser cette double condition :

- Une alimentation continue peut être placée entre E et E'. Il suffit alors de régler la tension à la valeur désirée , la continuité de courant étant réalisée automatiquement.

- Deux injecteurs de courants de signes opposés peuvent être placés en E et E'. Il convient alors de régler le courant de façon à réaliser la différence de potentiel voulue.

5.2.3 - Sur les parties OF et $O'F'$ qui représentent l'extrados et l'intrados du profil, il suffit de réaliser la condition de glissement.

D'après le chapitre 4.1, cette condition se traduit par une injection de courant suivant la relation :

$$I_o = -\frac{\ell}{R' K V_x} \frac{1}{M_o (1+\gamma)^{1/2}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (79)$$

5.2.4 - La condition de Kutta-Joukowsky s'exprime par l'égalité des vitesses de perturbation aux bords de fuite de l'extrados et de l'intrados.

Dans les sections telles que GG' du sillage il convient de réaliser le même type de condition qu'en amont du profil.

La valeur de la différence de potentiel $\left(\frac{\partial V'}{\partial}\right)_{oy_1}$ est fixée lors du réglage de la condition de Kutta-Joukowsky.

5.3 - Compléments et Simplifications

La linéarisation peut, selon le schéma de la figure 59, être effectuée sur la vitesse à l'infini amont U_o, l'angle d'incidence α étant reporté sur l'application des conditions aux limites sur le profil.

L'équation traitée devient alors :

$$(1-M_o^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = M_o^2(1+\gamma)\frac{\varphi_x}{U_o}\varphi_{xx} \qquad (80)$$

c'est-à-dire de la même forme que celle utilisée dans le cas du profil seul.

La relation $\rho_o V_x = \rho'_o V'_x$ est toujours valable.

Les relations donnant le Mach local et le coefficient de pression deviennent :

$$M_\ell^2 = M_o^2\left[1 + (\gamma+1)\frac{\varphi_x}{U_o}\right] \qquad (81)$$

$$C_p = -2\frac{u}{U_o} \qquad (82)$$

Les conditions aux limites se simplifient pour devenir :

- à l'infini amont $\quad \frac{u_o}{U_o} = \frac{v_o}{U_o} = 0$

- à l'infini aval $\quad v'_o = U'_o \sin\delta \qquad (83)$

soit encore $\quad \frac{v'_o}{U_o} = \frac{\rho_o}{\rho'_o}\frac{\cos\beta}{\cos(\delta+\beta)}\sin\delta$

Le rapport $\frac{\rho'_o}{\rho_o}$ est alors donné par :

$$\frac{\rho'_o}{\rho_o} = \frac{1 + (1-M_o^2)\frac{u'_o}{U_o}}{1 + \frac{u'_o}{U_o}} \qquad (84)$$

La condition de glissement du fluide sur le profil s'exprime par :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f'_{xc} - U_o\alpha \qquad (85)$$

La représentation analogique se trouve simplifiée puisque l'on obtient :

- à l'infini amont et l'infini aval : $I_1 = I'_1 = 0$ (86)
- devant le profil $(\delta V)_{oy} = 0$

il suffit de réaliser une liaison par fil, des points en vis-à-vis.

- sur le profil il faut injecter l'intensité $I'_o = I_o + I''_o$; I_o traduisant l'effet d'épaisseur, I''_o l'effet d'incidence.

$$I'_o = -\frac{\ell}{R'K U_o} \frac{1}{M_o(1+\delta)^{1/2}} \left(\delta'_x - U_o \alpha \right) \qquad (87)$$

Dans le sillage les conditions sont identiques, du point de vue application, à celles réalisées dans la linéarisation sur $\rho_o V_x$

5.4 - Résultats

Lors des manipulations ayant pour but d'obtenir les résultats suivants, les deux types de linéarisation ont été utilisés.

Les figures 60 à 66 reproduisent les résultats obtenus pour différentes configurations du profil.

Chacune d'elles est caractérisée par la forme du profil, les répartitions du coefficient de pression sur l'extrados et sur l'intrados, le champ aérodynamique, l'angle de sortie θ, la valeur du rapport des masses volumiques ρ'_o et ρ_o prises à l'infini aval et à l'infini amont, la valeur du coefficient de portance.

Les différents profils présentés ont des épaisseurs relatives comprises entre 2 % et 4,5 %.

Dans tous les cas l'entreplan h est égal à 0,834 Corde, l'angle β étant de 53°20'. Le Mach à l'infini amont est 0,890 lorsque α = 1° et 0,915 quand α = 2°.

L'examen des différentes configurations du champ aérodynamique met en évidence l'intérêt de la méthode qui a permis d'obtenir cet ensemble de résultats.

La figure 62 montre un assez bon accord entre les résultats obtenus par la méthode analogique et ceux donnés par le calcul numérique mis au point par T.S. LUU, G. COULMY et A. GRISSA [49], [50].

Hormis la différence assez importante existant au bord d'attaque mal défini dans le réseau analogique (9 points seulement sur le profil) l'écart est voisin de 3 %.

Il convient également de remarquer le résultat de la figure 66 qui fait apparaître un "blocage" entre les profils.

A titre indicatif il est important de noter qu'il suffit, lorsque

...

la valeur du Mach à l'infini est choisie, de moins d'une vingtaine de minutes pour effectuer les réglages du profil, de son incidence, de la condition de Kutta-Joukowsky et des conditions du sillage pour obtenir la solution.

La connaissance des vitesses sur le profil lui-même est donc très rapide ; cependant, les relevés n'étant pas effectués de façon automatique le tracé d'un champ aérodynamique demande un temps relativement important.

Les figures 67 et 68 regroupent certains résultats obtenus sur les différentes grilles, à savoir la valeur de l'angle de sortie θ et celle du coefficient de portance en fonction de $\frac{\rho'_0}{\rho_0}$

Le coefficient de portance a été établi selon deux méthodes de calcul possibles :

- par intégration du coefficient de pression sur le profil et

- par application du théorème du débit de la quantité de mouvement. Les deux valeurs obtenues pour chaque profil sont légèrement différentes. Cet écart est dû essentiellement au calcul de la valeur θ, fait à partir d'une valeur très faible de v'_0 ; dans le cas de la linéarisation sur U_0, les valeurs sont plus grandes et par suite l'erreur sur δ beaucoup plus faible. Il a semblé intéressant également de tracer la courbe $C_y = f\left(\rho'_0/\rho_0\right)$ obtenue à partir du théorème de la quantité de mouvement lorsque α et θ sont faibles devant β

La courbe $\theta = f\left(\frac{\rho'_0}{\rho_0}\right)$ peut également être obtenue de deux façons :

- soit selon la formule (73) à partir des valeurs v'_0 et $\frac{\rho'_0}{\rho_0}$ déduites des manipulations,

- soit à partir de la relation de conservation de la masse (76) dans laquelle u_0, v_0, u'_0 et v'_0 ont été éliminés à l'aide des relations (70), (71), (73) et (74) pour obtenir la relation $\theta = f\left(M_*^2, \alpha, \beta, \rho'_0/\rho_0\right)$

Cette relation permet de fixer l'origine de l'erreur induite sur θ puisqu'il suffit d'un écart inférieur à 0,5 % dans l'affichage des conditions u_0 et v_0 à l'infini amont pour obtenir l'écart constaté sur la figure 68.

Cette cause d'erreur disparaît dans la linéarisation sur U_0 dans laquelle $u_0 = v_0 = 0$ est facile à imposer avec précision.

Une deuxième série de résultats concerne un type de grilles dans lequel l'angle β est nul.

Nous nous sommes imposé de déterminer différents modèles de profils donnant un même angle de déflexion pour une incidence identique égale à $\alpha = 1°$.

Les expériences ont conduit aux résultats des figures 69, 70 et 71.

La grille VI induit un blocage entre les profils. La répartition des vitesses est nettement améliorée sur la grille VII pour laquelle subsistent cependant deux poches supersoniques. Elles ont pu être éliminées sur le profil VIII dont la forme reste malgré tout très voisine de celle du profil VII.

6 - PROBLEMES CONCERNANT LES SOUFFLERIES

6.1 - Mesure de débit

Il a été vu au paragraphe 3 que la simulation analogique adoptée permet de connaître les vitesses u et v en tout point du domaine étudié.

Il est alors possible de connaître avec précision les débits qu'il convient de réaliser, à la paroi d'une veine perméable par exemple.

Il suffit en effet de mesurer sur le réseau les intensités qui circulent dans les résistances au-delà de la ligne qui sera la paroi de la veine considérée.

La figure 72 traduit ces résultats pour différentes hauteurs de la veine, et permet de constater que :

- les maxima de débits se trouvent au voisinage des perpendiculaires au profil passant par le bord d'attaque et le bord de fuite,
- au fur et à mesure que l'on s'éloigne du profil les débits tendent rapidement vers une valeur nulle.

Ainsi donc une paroi perméable sur une distance de deux cordes environ donnera pratiquement les mêmes résultats qu'une veine entièrement perméable.

Pour les mêmes conditions d'étude, la figure 73 fait apparaître les répartitions des coefficients de pression à la paroi de la veine.

6.2 - Correction de paroi

Si l'on considère un corps dans un espace illimité, le champ aérodynamique s'étend théoriquement jusqu'à l'infini. Les lignes de courant ont une configuration qui dépend à la fois du corps et de son incidence.

Si des parois limitent la veine fluide, elles imposent localement des contraintes qui modifient le champ.

Ainsi dans le cas de la veine guidée la vitesse est tangente à la paroi. Dans la veine libre la pression statique est constante sur la frontière.

Si la paroi guidée épousait la forme des lignes de courant ou si la frontière libre correspondait à des isobares l'effet de limitation de la veine serait nul.

Ce problème de limitation est résolu par l'application de formules de correction qui ont pour but de rendre valables en espace infini les résultats obtenus en soufflerie.

L'expérience vérifie bien les corrections de paroi pour des nombres de Mach relativement faibles.

L'effet de la compressibilité de l'air est dans le sens d'une augmentation de l'influence des parois puisque les déformations des lignes de courant se font sentir d'autant plus que la vitesse est voisine de celle du son.

Les quelques résultats présentés sur ce sujet dans les lignes suivantes n'ont pas la prétention de traiter le problème de correction de paroi, mais seulement pour but de montrer que le problème peut être envisagé de façon simple par simulation analogique et de donner peut être lieu à une étude ultérieure beaucoup plus approfondie.

Les éléments de base de cette étude sont les suivants : un profil lenticulaire de 4,25 % d'épaisseur relative induit la répartition de vitesse reproduite sur la figure 74 lorsque le Mach à l'infini est de 0,866 dans un espace illimité.

Ce profil est ensuite placé dans une veine guidée pour laquelle la hauteur H est prise comme paramètre.

Pour chacune des valeurs de ce paramètre, il est possible de déterminer un nombre de Mach à l'infini dans la veine tel que la répartition des vitesses sur le profil soit identique (à cinq millièmes près) à celle observée lorsque le profil est placé dans l'espace illimité.

L'épaisseur relative du profil peut également être considérée comme un paramètre : pour chaque valeur il est possible de trouver un couple : hauteur de veine et nombre de Mach tels que la répartition de vitesse soit conservée sur le profil.

La figure 74 reproduit certains résultats pour un profil lenticulaire d'épaisseur relative k.

La distribution de vitesse obtenue est identique dans les quatre cas suivants :

1 -	k = 4,25 %	M_o = 0,866	Espace illimité
2 -	k = 4,25 %	M_o = 0,826	H = 1,390 C
3 -	k = 4,25 %	M_o = 0,830	H = 1,553 C
4 -	k = 4 %	M_o = 0,830	H = 1,385 C

Le tracé des champs aérodynamiques (fig. 75) qui a été effectué dans les cas 1 et 4 ci-dessus montre que si les lignes iso-Mach local sont en coïncidence sur le profil lui-même, une divergence très nette apparaît rapidement même à proximité du profil entre les résultats obtenus dans la veine par rapport à ceux induits par le profil dans un espace illimité.

Bien que les résultats précédents soient trop peu nombreux, il convient de faire la remarque suivante qui pourrait donner lieu à un développement.

Il faut, en effet, noter l'importance de la courbe $\Delta M = f\left(\frac{H}{C}\right)$

dans laquelle :

ΔM = écart entre le Mach à l'infini dans l'espace illimité et le Mach à l'infini dans la veine (ces deux valeurs donnant la même répartition de vitesse sur le profil)

H = hauteur de la veine

C = corde du profil.

Ainsi, dans le cas du profil lenticulaire 4,25 %, on peut constater que le produit $\Delta M . \frac{H}{C}$ est le même pour les deux cas dont on dispose.

L'étude mérite d'être approfondie puisque, s'il s'avérait de façon plus précise que $\Delta M . \frac{H}{C}$ était conservé, il suffirait d'étudier un même profil dans deux veines de hauteurs différentes, à deux valeurs de Mach à l'infini différentes et induisant la même répartition de vitesse sur le profil, pour en déduire la valeur du nombre de Mach à l'infini dans l'espace illimité donnant cette même répartition.

Ces résultats succincts permettent difficilement de conclure sur un problème aussi délicat que celui des corrections de parois, mais ont permis de mettre en évidence, de façon extrêmement simple, l'intérêt qui peut être tiré de cette méthode analogique, le même type d'expérience pouvant être envisagé dans le cas de parois perméables.

6.3 - Soufflerie à fréon

Pour l'air le rapport γ des chaleurs spécifiques est égal à 1,4.

L'analogie électrique utilisée permet de modifier de façon simple la valeur du rapport γ puisqu'il intervient, lors de la réalisation du réseau, uniquement dans l'expression de la résistance fixe R_1 placée suivant la direction Ox (voir paragraphe 4.1).

Ainsi, à la demande de la Direction Aérodynamique de l'ONERA, le cas d'un profil placé dans le fréon pour lequel le rapport des chaleurs spécifiques γ est voisin de 1,1 a été envisagé.

Pour un profil lenticulaire de 3,1 % d'épaisseur relative placé dans le fluide à M_o = 0,898 (fig. 76) il apparaît une nette différence entre les vitesses obtenues sur le profil, celles existant dans l'air étant plus grandes que celles que l'on trouve dans le fréon.

De la même façon (fig. 77) les répartitions des vitesses induites sur le profil A montrent que l'importance de l'onde de choc est moindre dans le fréon.

7 - ETUDE DE PROFILS AVEC ONDE DE CHOC

Comme il a été montré au paragraphe 3.2, aucune condition supplémentaire n'est nécessaire pour obtenir des solutions dans lesquelles existe une onde de choc.

Le but de cette étude est de mettre en évidence, sur quelques exemples, l'existence de ces solutions.

Il sera montré ensuite comment une très légère modification du profil, correctement localisée, permet de faire disparaître l'onde de choc qui se forme sur le profil initial.

La figure 78 reproduit la forme du profil A que l'on s'est proposé d'étudier, la répartition des vitesses et le champ aérodynamique au voisinage du profil.

La figure 79 concerne le profil B dont l'épaisseur relative est 3,2 % celle de A étant de 3,9 %.

Pour ces deux profils le maximum de Mach local est de l'ordre de 1,10 c'est-à-dire que le rapport des vitesses $\frac{u}{U_o}$ est voisin de 0,25.

La discontinuité de vitesse est très importante puisque le saut de vitesse prend la valeur $\frac{u_1}{U_o} - \frac{u_2}{U_o} = 0,26 - 0,043 = 0,217$ à travers l'onde de choc.

Pour ces deux profils, il convient de remarquer l'importante zone supersonique qui s'est développée au voisinage du maître couple.

Dans le même ordre d'idée il est intéressant d'examiner le profil C (fig. 80 et 81). Ce profil qui présente un maximum de Mach local égal à 0,900 dans l'espace illimité lorsque $M_o = 0,796$ provoque une importante discontinuité de vitesse lorsqu'il est placé dans une veine dont la hauteur H = 0,719 C.

Le point intéressant n'est pas tellement l'effet de paroi qui a été présenté par ailleurs, mais plutôt la grandeur de la zone supersonique obtenue, puisque cette zone atteint et recouvre une partie de la paroi de la veine.

Remarque : La prise en considération de ce résultat peut introduire l'étude d'une tuyère fonctionnant en régime supersonique.

Les différents essais ont mis en évidence, dans certains cas, des difficultés de réglage pour obtenir le profil désiré, comme cela a été évoqué au paragraphe 4.4 de la Première Partie.

L'expérience acquise lors de ces expérimentations a permis de diriger l'étude vers les résultats suivants :

La figure 82 reproduit la forme de 4 profils dont les cotes ne présentent que de faibles différences bien que les distributions de vitesses soient très éloignées les unes des autres.

A la demande de R. Legendre, on s'est proposé de modifier dans de très faibles proportions la pente locale du profil dans une zone beaucoup plus étroite que lors des essais précédents, cette région étant située

sur la partie du profil couverte par la zone supersonique.

Le profil initial est celui noté Y sur la figure 63. La répartition des vitesses qui apparaissent, lorsque le Mach à l'infini est 0,836, traduit l'existence d'une onde de choc nettement définie.

Deux nouveaux profils Y_1 et Y_2 ne présentant qu'une infime différence avec Y sont le sujet de la comparaison.

Par rapport à Y le profil Y_1 présente un maximum de différence de cote de 0,53 % de l'épaisseur relative tandis que pour Y_2 cette valeur est 2,86 %.

Le résultat intéressant qu'il conviendrait peut être de considérer comme important apparaît de façon précise sur la figure 63 :

La discontinuité de vitesse indiquant la présence d'une onde de choc qui existait sur le profil initial a totalement disparu sur les profils ainsi modifiés.

Remarque : Il convient également de noter que ces résultats ne sont pas en désaccord avec les précisions d'usinage obtenues couramment dans la réalisation de maquettes pour les souffleries transsoniques. Ainsi, si l'on envisageait la réalisation d'une maquette ayant 10 centimètres de corde et 10 % d'épaisseur relative, la déformation de 0,5 % de l'épaisseur relative envisagée précédemment se traduirait sur la maquette par un creux de 50 microns, valeur nettement supérieure aux défauts d'usinage [45].

Cette étude, limitée aux quelques résultats ci-dessus, confirme les difficultés que l'on rencontre dans le traitement de l'équation en régime transsonique et pourrait se révéler utile dans l'approche d'une solution plus générale basée sur une étude théorique.

8 - POSSIBILITES D'EXTENSION

A partir des bases acquises et des différentes applications traitées, il semble que seules des difficultés mineures devraient apparaître lors de la mise en oeuvre du réseau analogique pour traiter les applications suivantes.

8.1 - Effet d'incidence

Les essais effectués sur les grilles d'aubes ont montré qu'il était possible de placer le profil en incidence, les conditions de réglage de Kutta-Joukowsky et du sillage ne présentant aucune difficulté.

L'étude, dans l'espace illimité, d'un profil seul placé en incidence, peut donc être envisagée.

La seule raison pour laquelle ce problème n'a pas eu de réponse réside dans le nombre d'éléments actifs, non linéaires dont dispose le laboratoire d'Analogies Electriques.

Tous les problèmes traités jusqu'à présent ont nécessité l'emploi des 110 résistances négatives disponibles. Il conviendrait de doubler ce nombre pour traiter le cas d'un profil en incidence dans l'espace infini.

8.2 - Tuyères

Seulement deux exemples, destinés à montrer les possibilités des analogies dans le cas des tuyères, ont été abordés.

Le premier (fig. 84) concerne une tuyère convergente divergente pour laquelle le divergent donne naissance à un écoulement supersonique.

Le deuxième traite une tuyère à deux cols pour laquelle la section au deuxième col est supérieure à celle du premier.

Le cas simulé (fig. 85) a permis de mettre en évidence l'engorgement de la tuyère lorsque une zone subsonique est comprise entre deux régions supersoniques.

8.3 - Système de révolution

Dans ce cas, l'équation des petites perturbations, écrite sous la forme (27) au chapitre 2.1 dans le plan (x, y), peut s'écrire en coordonnées cylindriques (fig. 86) de la manière suivante :

$$\left(1-M_0^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - M_0^2\,\frac{\gamma+1}{U_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

$$+ \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (88)$$

De façon classique, le problème peut se ramener à un traitement bidimensionnel en effectuant une section à θ constant.

L'équation est alors :

$$\left(1-M_0^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - M_0^2\,\frac{\gamma+1}{U_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \qquad (89)$$

Après la transformation :

$$r_1 = r\,M_0\,(\gamma+1)^{1/2}$$

identique à celle utilisée précédemment, la forme sous laquelle est traitée l'équation, est la suivante :

$$\frac{1-M_0^2}{M_0^2(1+\gamma)}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{U_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r_1} = 0$$

Dans la simulation analogique sur le plan (x, r_1) les différentes résistances (fig. 86) prennent les valeurs ci-après :

R_o = résistance de base

$$R_1 = R_2 = \frac{R_o}{n} \frac{M_o(\gamma+1)}{1-M_o^2}$$

$$R_1^* = R_2^* = -\frac{2 R_o^{3/2}}{n K \Delta V_x} \qquad (91)$$

$$R_3 = \frac{2}{2n+1} R_o$$

$$R_4 = \frac{2}{2n-1} R_o$$

Si l est le pas du découpage n est fixé par $r_1 = nl$.

Les conditions aux limites se traduisent, pour la simulation du corps, par une injection d'intensité suivant la relation :

$$I_o = -\frac{l}{2 R_o K U_o} \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} \qquad (92)$$

Un développement en série des vitesses au voisinage de l'axe, montre que les vitesses u et v sont d'un ordre différent.

Pour obtenir l'expression du coefficient de pression correctement approché au premier ordre, il convient, à partir de la relation (30), de l'écrire sous la forme :

$$C_p = -2\frac{u}{U_o} - \frac{v^2+w^2}{U_o^2} \qquad (93)$$

soit :

$$C_p = -\frac{2}{U_o}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{U_o^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 \qquad (94)$$

8.4 - Cas du nombre de Mach supersonique à l'infini amont

L'équation des petites perturbations traitée étant valable lorsque M_o est supérieur à l'unité, il est possible de prévoir un développement intéressant.

Les quelques lignes suivantes n'ont pour but que de montrer qu'il est possible avec le même réseau analogique de fonctionner dans le cas où $M_o > 1$.

Le problème est abordé par l'intermédiaire de l'analogie, en l'occurence très expressive.

En se reportant à la figure 87, il faut noter la position très particulière du deuxième point d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Ce point très particulier, noté A, pour lequel la valeur du Mach local s'exprime très simplement selon $M_\ell = \sqrt{2 - M_o^2}$ n'a jamais pu être rattaché à aucune interprétation ni aérodynamique ni électrique.

Rappelons que le point O, pour lequel $M_\ell = M_o$, est le point de repos d'un élément non linéaire commandé en tension (cas $M_o < 1$) et le point A, celui d'un élément commandé en courant.

Le cas de M_o supérieur à l'unité peut être envisagé en faisant travailler le réseau, et plus précisément l'élément non linéaire, sur une caractéristique $i = f(\Delta V)$ telle que 2 sur la figure 87, de la même façon qu'il fonctionnait sur la courbe 1 lorsque M_o est inférieur à l'unité. On est alors conduit à utiliser deux résistances négatives pour réaliser cette caractéristique.

On peut également réaliser un nombre de Mach supersonique à l'infini amont en procédant de la manière suivante :

La linéarisation est faite sur U_o subsonique ; une condition à l'infini doit introduire une vitesse de perturbation u_∞ de façon que $U_o + u_\infty$ soit supérieure à la vitesse du son.

Cette condition est immédiatement réalisée par des éléments non linéaires commandés en courant dont le point de repos est A.

Du point de vue matériel le problème est nettement simplifié (une seule résistance négative).

Le réseau utilisé est strictement le même que dans le cas $M_o < 1$, le passage de l'élément R_1^* commandé en tension à l'élément R_1^* commandé en courant pouvant s'effectuer par inverseur manuel.

Jusqu'à présent aucun essai n'a été effectué ; mais il s'agit d'une extension éventuelle qui sera abordée dès que cela sera possible.

CONCLUSION

La solution d'équations non linéaires peut être parfois délicate à atteindre par voie numérique à l'aide des méthodes classiques de différences finies où le coefficient de relaxation ne peut être ajusté que par l'expérience.

Grâce à la mise au point d'éléments résistifs non linéaires, qui avaient servi précédemment à traiter les équations :

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\alpha(\varphi)} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \Delta\varphi = f(\varphi)$$

la simulation analogique de l'équation mixte du type :

$$A\,\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = S\,\frac{\varphi_x}{U}\,\varphi_{xx}$$

a été réalisée.

Elle a été expérimentéedans le cas de l'équation des petites perturbations pour un écoulement transsonique.

Chaque fois que la confrontation avec d'autres résultats à été possible, elle a été faite et s'est avérée très satisfaisante.

L'intérêt majeur de cette simulation est d'assurer, sans aucune itération, dans les différents domaines concernés, mais inconnus à priori, les régimes subsonique et supersonique de l'écoulement qui correspondent aux caractères elliptique et hyperbolique de l'équation traitée.

La résolution numérique de cette équation nécessite une adaptation de l'algorithme de calcul au régime de l'écoulement et exige donc la connaissance, à chaque pas du cycle itératif, des zones supersonique et subsonique.

D'autre part, l'utilisation des systèmes de visualisation contribue à faire de ce réseau un instrument de recherche appliquée : par exemple dans le but d'optimiser la forme d'un profil à partir de la répartition des vitesses obtenue sur le profil initial.

Les différents types d'applications abordés :

- profil seul
- grille d'aubes
- modification locale d'un profil
- correction de paroi

ont mis en évidence les possibilités de cette méthode.

L'étude menée sur la stabilité électrique peut se révéler utile dans l'hypothèse d'un développement de la méthode analogique dans le traitement d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ENSELME ET G. GAUBERT

Sur la résolution de l'équation de la diffusion non linéaire à l'aide d'un réseau électrique.
Congrès AICA, Lausanne, 1967.

[2] G. FOURNIER

Ecoulement de plasma sans collision autour d'un cylindre en vue d'applications aux sondes ionosphériques.
Thèse présentée à la Fac. Sci. ORSAY, PARIS, 1971.

[3] W.J. KARPLUS

Analog. Simulation, Mc Graw-Hill, 1958.

[4] W.J. KARPLUS

An electric circuit theory approach to finite difference stability.
TRANS AIEE, vol. 77, 1958.

[5] L.O. CHUA AND R.A. ROHRER

On the dynamic equation of a class of non linear RLC networks.
IEEE Trans. Circuit Theory, Dec. 1965.

[6] L.O. CHUA

Introduction to non-linear network theory.
Mc Graw-Hill , 1969.

[7] L.O. CHUA

Synthesis of new non linear network elements.
Procedings of the IEEE, vol. 56, Aug. 1968.

[8] N.G. CHETAYEV

The stability of motion.
Pergamon Press, 1961.

[9] KORN AND KORN

Electric analog. Computers.
Mac Graw-Hill, 1952.

[10] MAGNUS, GALLAHER, YOSHIHARA

Inriscid supercritical airfail theory.
AGARD Conference Proceedings N° 35, Sept. 1968.

[11] E.M. MURMAN, J.D. COLE

Calculation of plane steady transonic flows.
Boeing Scient. Res. Lab., Jan. 1970.

[12] E.M. MURMAN AND J.A. KRUPP

Solution of the transonic potentiel equation using a mixed finite difference system.
Proceedings of the 2 th. International Conference on Numerical Methods in Fluid-dynamics, Sept. 1970.

[13] J.R. SPREITER AND A.Y. ALKSNE

Thin airfail theory based on approximate solution of the transonic flow equation.
NACA TN. 3970, May 1957.

[14] M.A. HEASLET AND J.R. SPREITER

Three dimensional transonic flow theory applied to slender wings and bodies.
NACA TN 3717, July 1956.

[15] J.R. SPREITER AND S.S. STAHARA

Calculative techniques flow transonic flows about certain class of airfoils and slender bodies.
NASA CR 1722, April 1971.

[16] J.R. SPREITER AND S.S. STAHARA

Developments in transonic flow theory.
Zeits dirigit für Flugwissenschaften.
Februar-März 1970.

[17] K. OSWATITSCH

Die Geschwindigkeits verteilung and symmetrischen Profilen beim Auftreten lokaler Uberschallgebiete.
Acta Physica Austriaca 1950.

[18] T.R. GULLSTRAND

The flow over symmetrical aerofails without incidence in the lower transonic range.
Royal Institute of Techn., Stockholm, KTH-AERO, T.N. 20, 1952.

[19] T.R. GULLSTRAND

The flow over symmetrical aerofails without incidence at sonic speed.
KTH-AERO T.N. 24, 1952.

[20] T.R. GULLSTRAND

The flow over two-dimensional aerofails at incidence in the transonic speed range.
KTH-AERO T.N. 27, 1952.

[21] D. Mac KENZIE and MORETTI

Time dependant calculation of the compressible flows about airfails.
AGARD, Conference Proceedings n° 35, sept. 1968.

[22] R.C. LOCK

Test cases for numerical methods in two dimensional transonic flows.
AGARD, Rep. N° 575, Nov. 1970.

[23] J.L. STEGER AND H. LOMAX

Generalized relaxation methods applied to problems in transonic flows.
Proc. of the 2 nd International Conference on numerical methods in fluid dynamics, Sept. 1970.

[24] M. HOLT

The calculation of high subsonic flow past bodies by the method of integral relations.
Proc. of the 2nd International Conference on numerical methods in fluid dynamics, Sept. 1970.

[25] LIPNITZKI

Calcul de l'écoulement transsonique autour des corps de révolution.
PMM T 34 N° 3, 1970, pp. 508-513.

[26] Iou. B. LIFCHITS

L'écoulement transsonique autour des corps élancés.
Bulletin Ac. des Sci. de l'URSS.
1968, N° 4, pp. 129-133.

[27] T. KATSANIS

Numerical solution of Tricomi equation using theory of symmetric positive differential equations.
S.I.A.M. J. Numer. Anal. - Vol. 6, n° 2, June 1969.

[28] M.S. CAHN AND J.R. GARCIA

Transonic Airfail Design.
J. Aircraft, vol. 8, n° 2, Febr. 1971.

[29] W.D. HAYES

Second Order pressure low for two dimensional compressible flow.
Journal of Aeronautical Sciences, April 1955.

[30] W.D. HAYES

La seconde approximation pour les écoulements transsoniques non visqueux.
Journal de Mécanique, vol. 5, n° 2, juin 1966.

[31] P. GERMAIN ET G. GILLON

Ecoulements transsoniques au voisinage d'un point de rencontre d'une onde de choc et d'une ligne sonique.
X^{e} Congrès International de Mécanique Appliquée, Stresa 1960, Publ. ONERA n° 102, 1961.

[32] M. ROY

Sur la stabilité locale de l'onde de choc dans un écoulement plan et stationnaire à entropie et vitesse limite uniformes.
CR Acad. Sc. PARIS, A, t. 270, (11 mai 1970), p. 1266-1269.

[33] M. ROY

Sur le point d'extinction d'une onde de choc au sein d'un écoulement amont plan et stationnaire à entropie et vitesse limite uniformes.
C.R. Acad. Sc. PARIS, A, t. 271,(20 juillet 1970, p. 183-186.

[34] T.H. MOULDEN

A discussion of the shock-wave in mixed flow.
AIAA Paper, N° 69-43.
AIAA 7th Aerospace Sciences Meeting, January 1969.

[35] A.L. JAUMOTTE

Chocs et ondes de choc, (1971), Masson.

[36] M. SICHEL

Structure of weak non Hugoniot shocks.
The physics of fluid , vol. 6, n° 5, may 1963

[37] M. SICHEL

A study of the equation $\varphi_{xxx} - \varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$
which describes the structure of weak non Hugoniot shock-waves.
Princeton University, Rep. 541, March 1961.

[38] J.D. COLE AND A.F. MESSITER

Expansion Procedures and Similarity Laws for Transonic Flow.
Note 57-626 Calif. Inst. of Techn., Pasadena - California, 1957.

[39] P. GOLAZ, P. REBUFFET, M. SIRIEIX

Résultats expérimentaux obtenus au voisinage de la vitesse du son sur une maquette d'aile à profil losangique.
C.R. Acad. Sc. PARIS, A, t. 235, (18 août 1952), pp. 459-461.

[40] H. NORSTRUD

Numerische Lösungen für Schallnohe Strömungen um ebene Profile.
Zeitschrift für Flugwissenschaften. - Mai 1970.

[41] R. MICHEL, F. MARCHAUD, J. LE GALLO

Influence d'un point d'inflexion à l'arrière d'un profil en écoulement transsonique.
La Recherche Aéronautique n° 40, 1954.

[42] R. MICHEL, F. MARCHAUD ET J. LE GALLO

Etude des écoulements transsoniques autour de profils lenticulaires à incidence nulle.
ONERA 1953, Publication n° 65.

[43] R. MICHEL, F. MARCHAUD ET J. LE GALLO

Influence de la position du maître-couple sur les écoulements transsoniques autour de profils à pointes.
ONERA 1954, Publication n° 72.

[44] VINCENT DE PAUL ET A. DYMENT

Recherches sur les profils d'ailes en écoulement subsonique élevé.
VIe Colloque Aerodyn. Appl. AFITAE
Toulouse, Nov. 1969.

[45] M. BAZIN, R. BERNARD-GUELLE, J. PONTEZIERE

Critique des techniques d'essais de profils transsoniques.
7e Colloque Aérodyn. App. AFITAE - Lyon 1970.

[46] T.R. GOODMAN

The porous wall wind tunnel.
Cornell Aeronautical Lab. Inc.
Report n° AD 594. A3. - 1950.

[47] J.P. CHEVALLIER

Calcul des corrections de parois en soufflerie transsonique.
9e Colloque Aérodyn. App., Nov. 1972.

[48] C. SIEVERDING

Experimental Data for Tandem Cascade in the high subsonic region.
Von Karman Inst. for Fluid Dynamics Internal Note 15,
Sept. 1966.

[49] TS. LUU, G. COULMY, A. GRISSA

Ecoulements compressibles subcritiques et supercritiques sans choc dans les grilles d'aubes.
9e Colloque Aérodyn. Appl., Nov. 1972.

[50] A. GRISSA

Contribution à l'étude des écoulements compressibles non linéaires à travers des grilles d'aubes par la méthode des singularités.
Diplôme de Docteur de 3e Cycle.
PARIS - Mars 1973.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

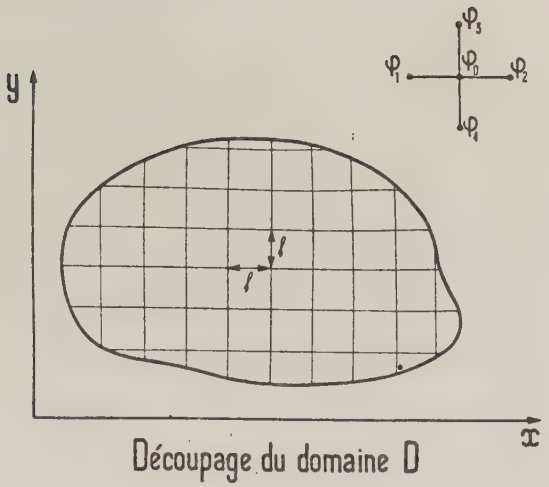


Fig.1-

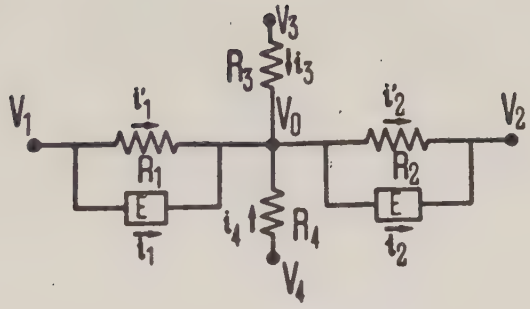


Fig.2- Constitution d'un noeud

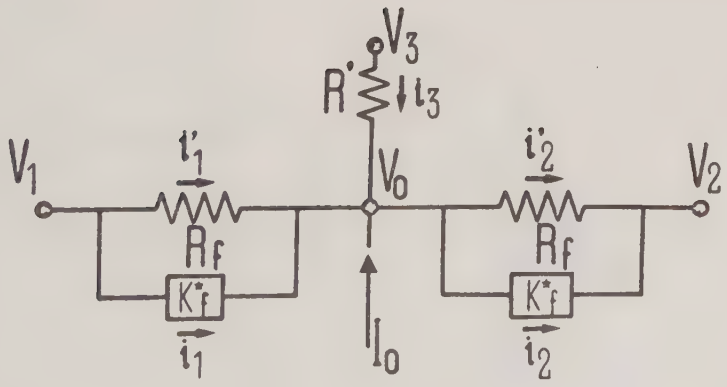


Fig.3- Constitution d'un noeud placé à la frontière

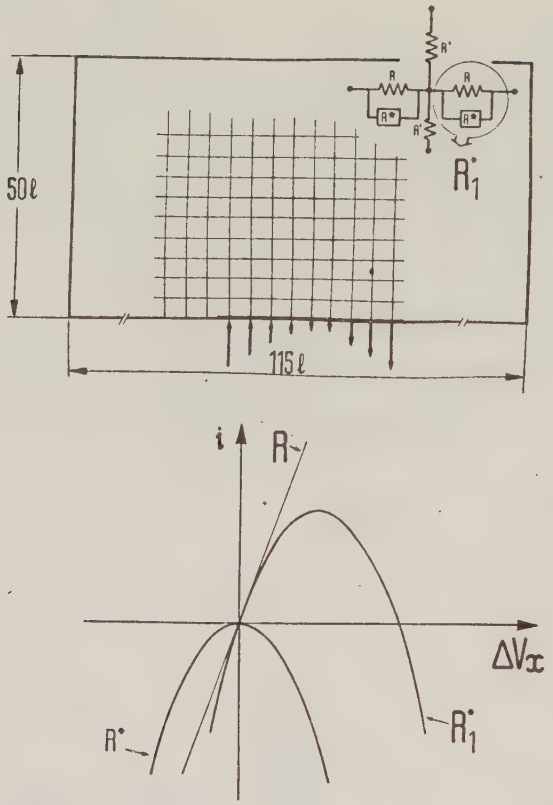


Fig.-4 Constitution du réseau

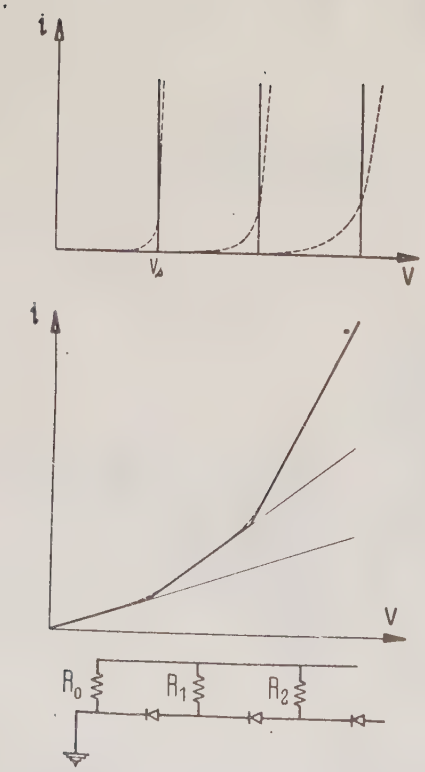


Fig.6- Fonctionnement de la résistance variable

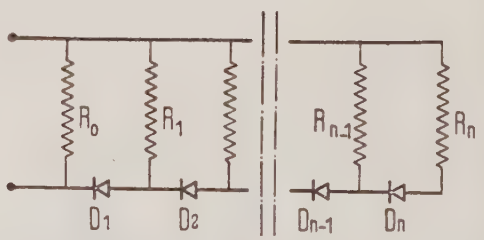


Fig.5- Elément résistance variable

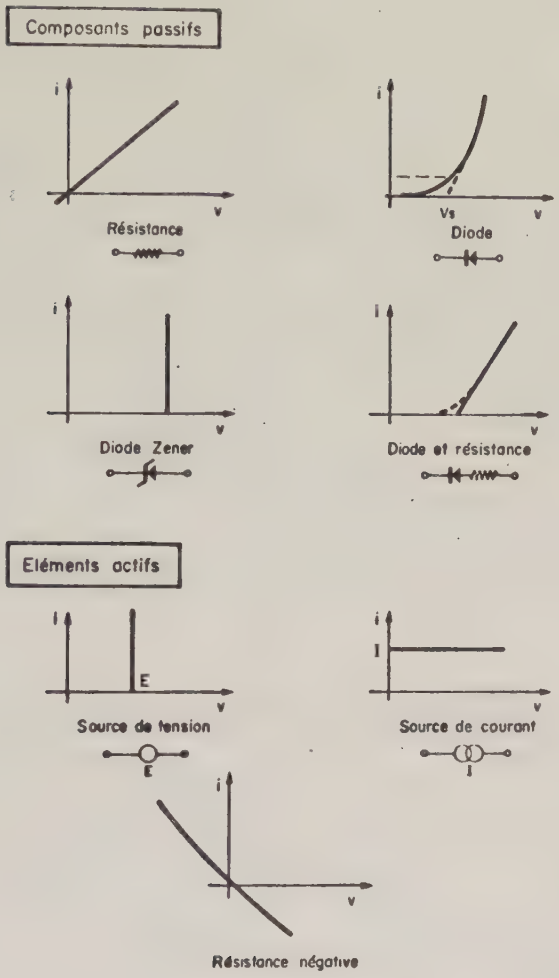


Fig.7- Composants passifs et éléments actifs

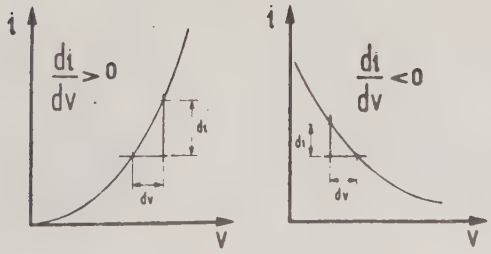


Fig.8- Types de résistance

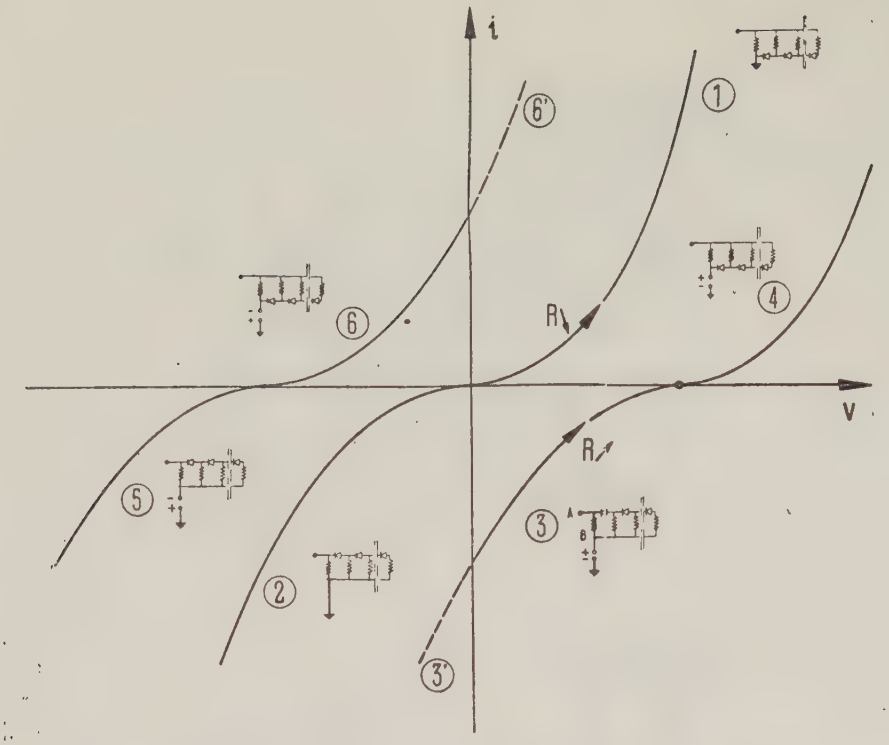
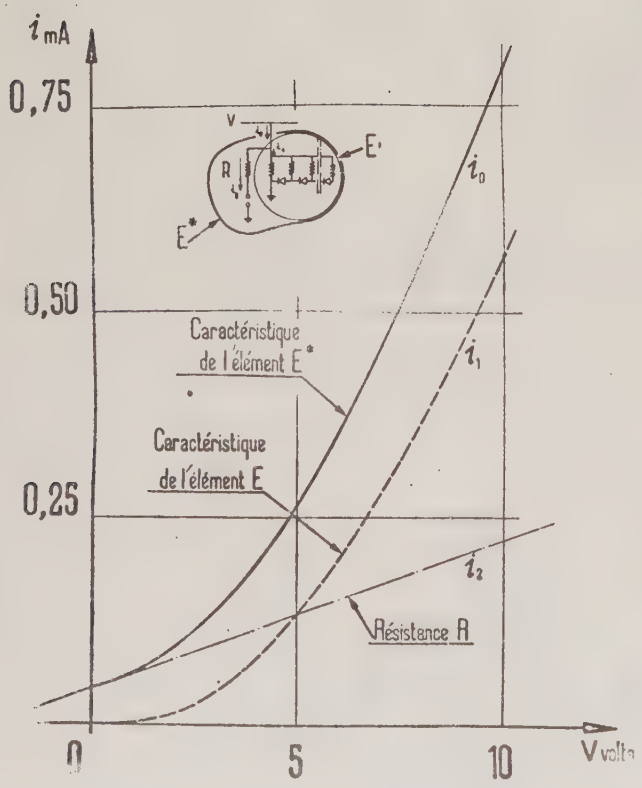


Fig.9- Exemples de caractéristiques $i = f(V)$



- Décalage de la caractéristique $i_1 = f(V)$

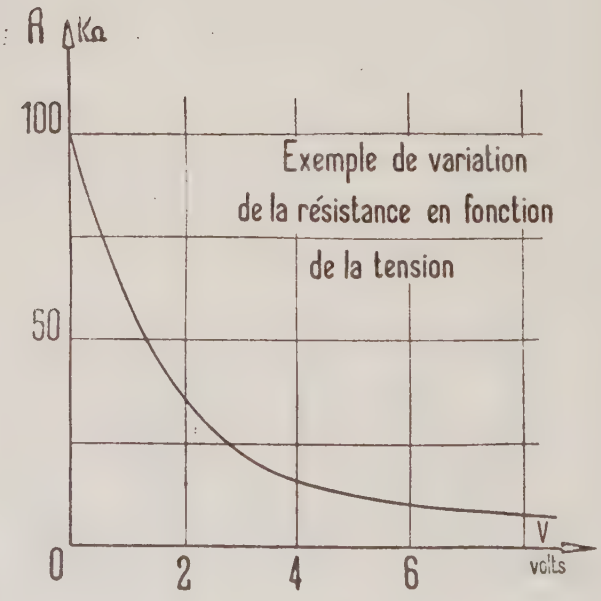


Fig.10-

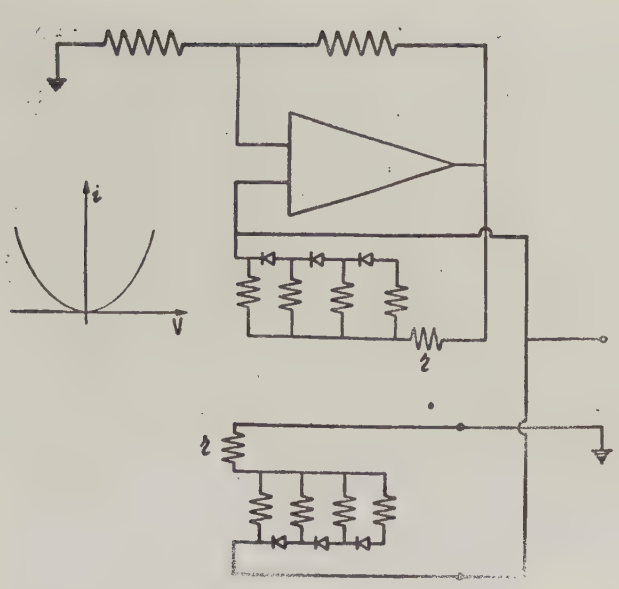
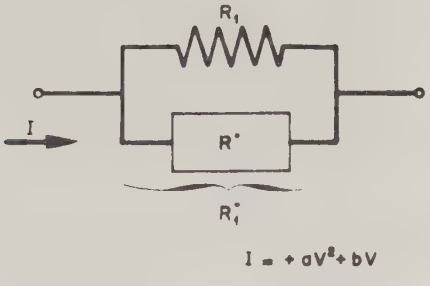


Fig.12- Association d'une résistance positive variable et d'une résistance négative variable



$I = +aV^2 + bV$

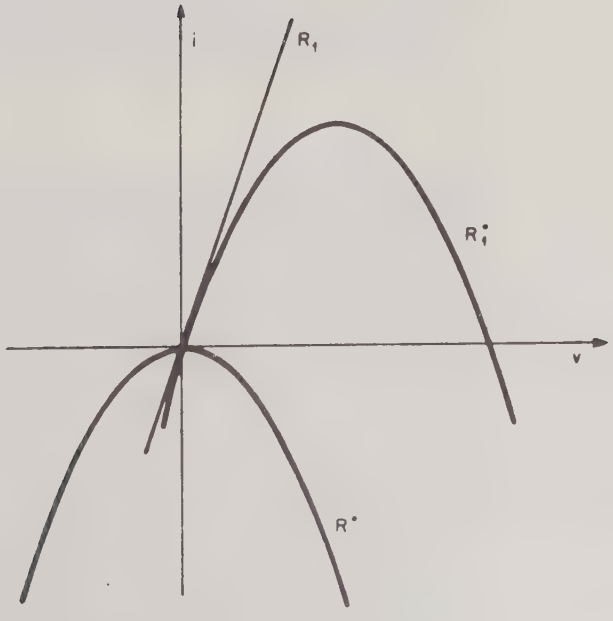


Fig.13- Réalisation de $I = \alpha V^2 + bV$

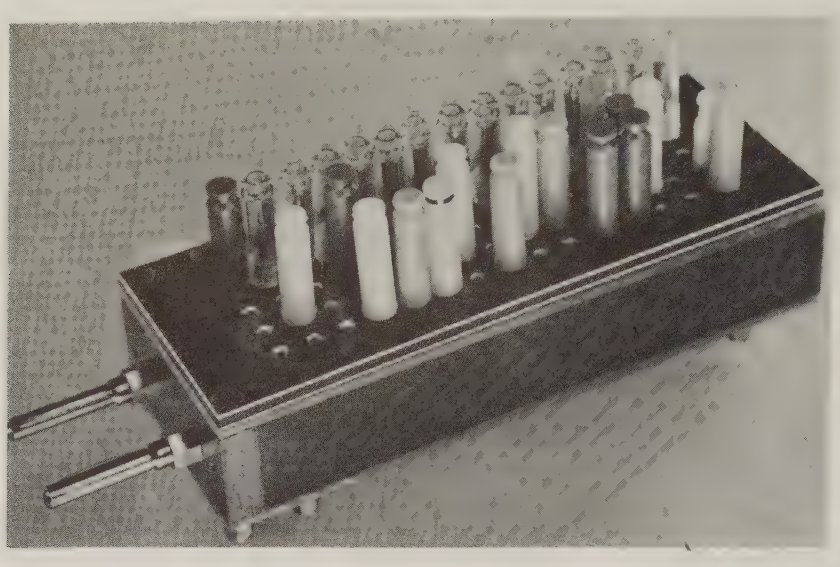
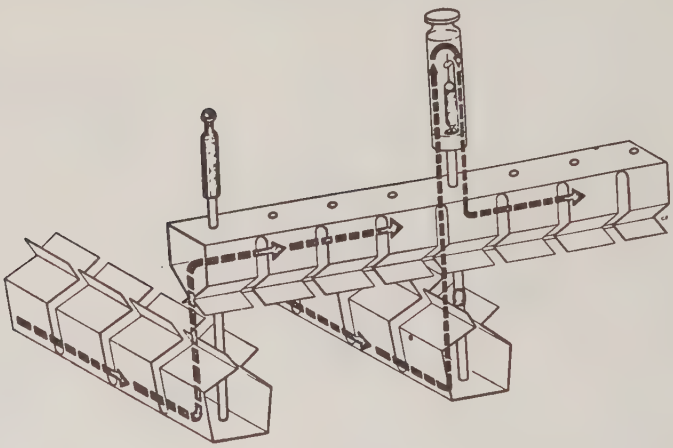


Fig.14- Résistance non linéaire



Détail d'un connecteur "Sealectro"

Fig.15

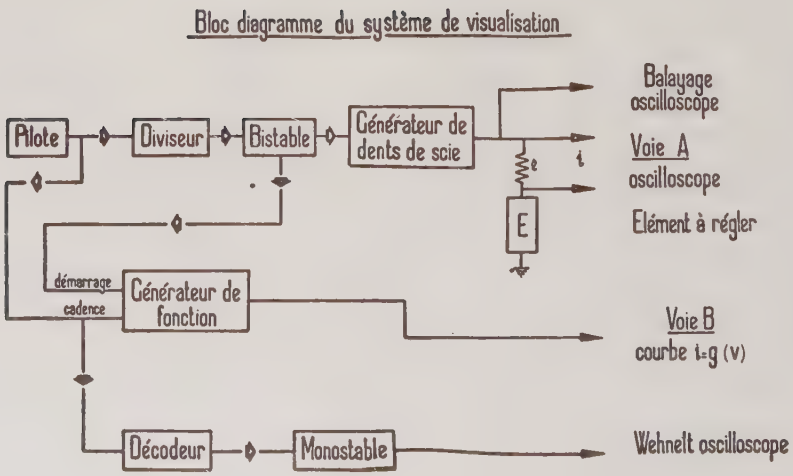
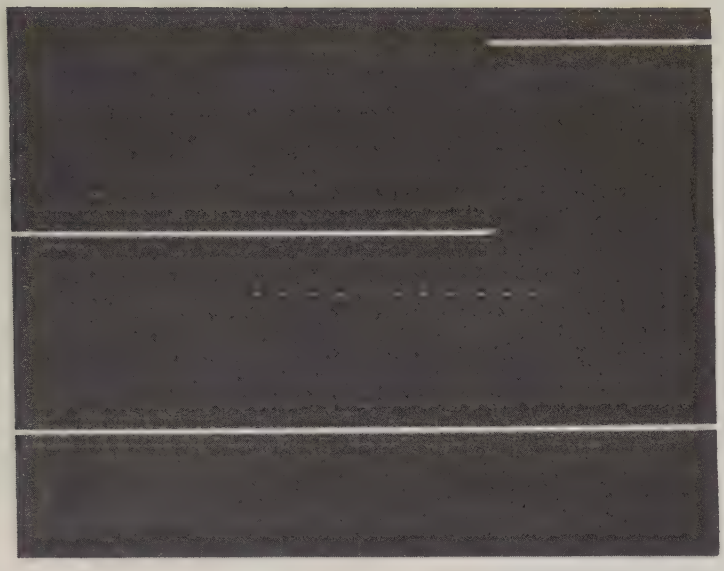
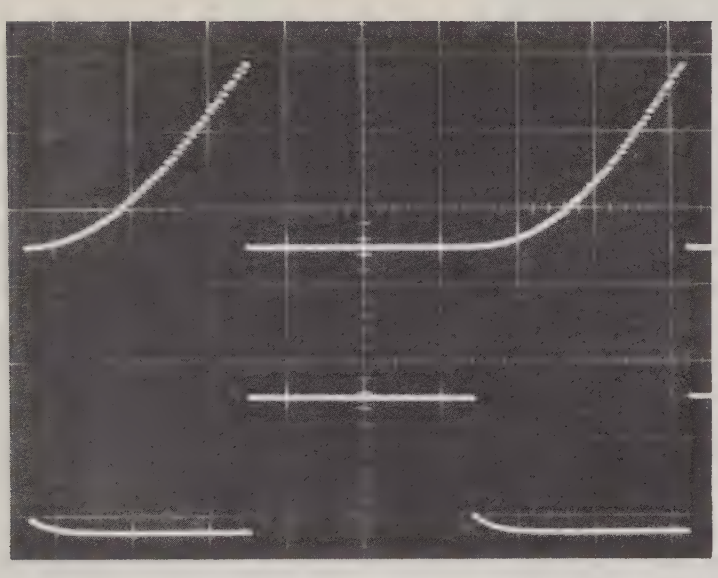


Fig.16- Bloc diagramme du système de visualisation

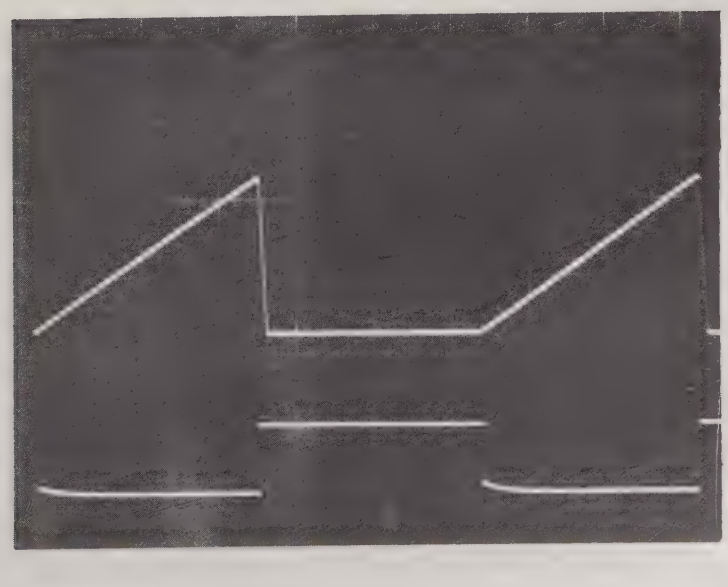


QUELQUES OSCILLOGRAMMES

1) - Créneau de démarrage du cycle
   - impulsion de modulation du Wehnelt.
   (leur fréquence est le dixième de la fréquence des impulsions de cadence du générateur de fonction).

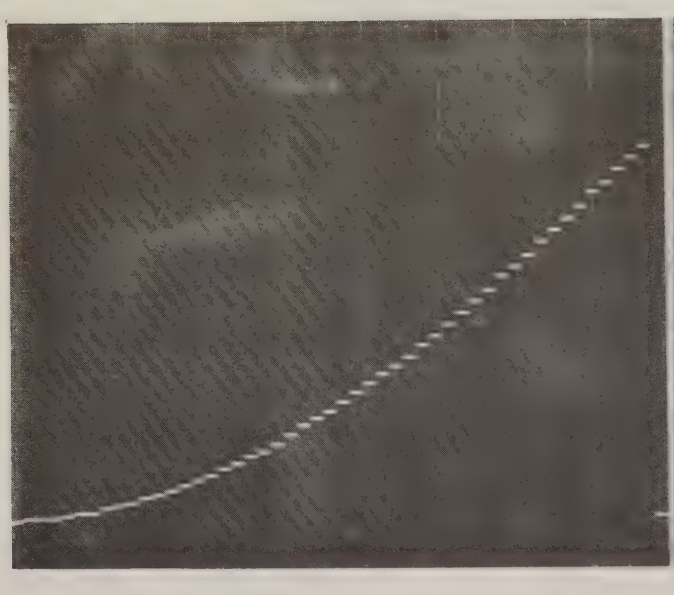


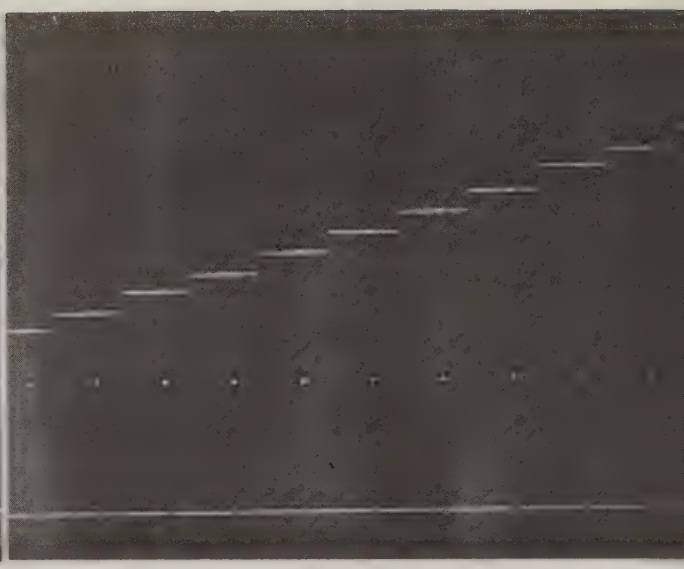
2) - Caractéristique i=f(v) programmée au générateur de fonction.
   - Créneau de démarrage du générateur de fonction.

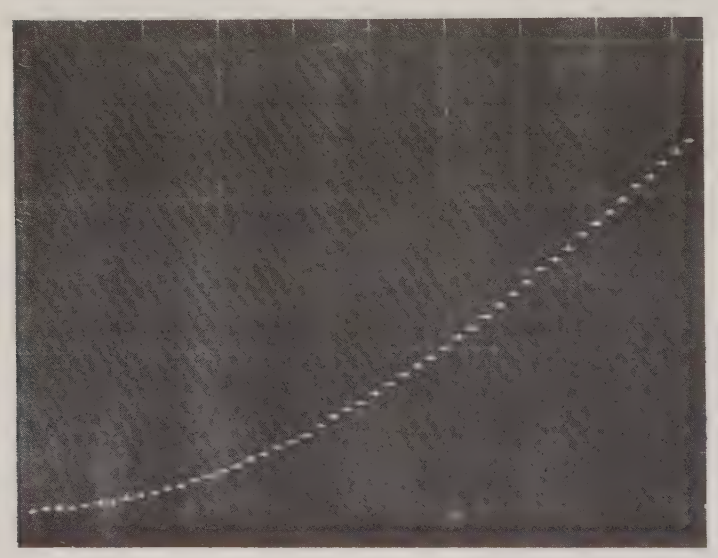


3) - Rampe de tension synchronisée sur le créneau de démarrage.

Fig.- 17







Caractéristiques i = f(v)
de référence

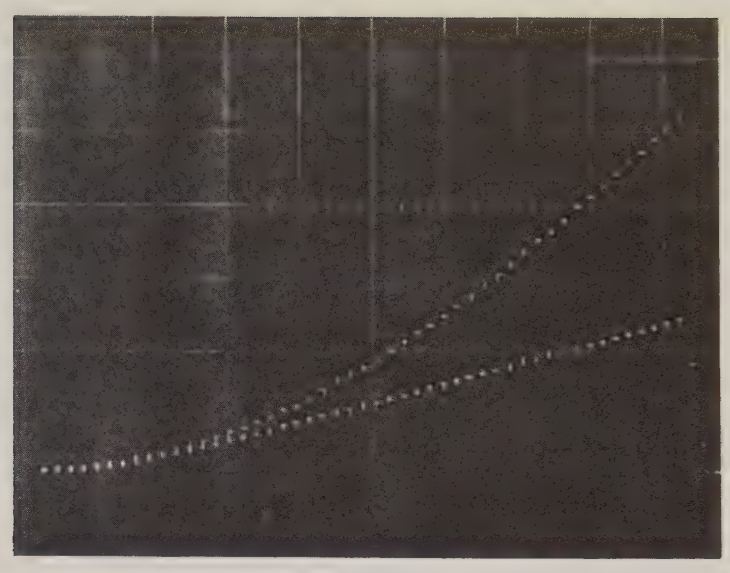
1 - Programmation sur le générateur de fonction SAIP.

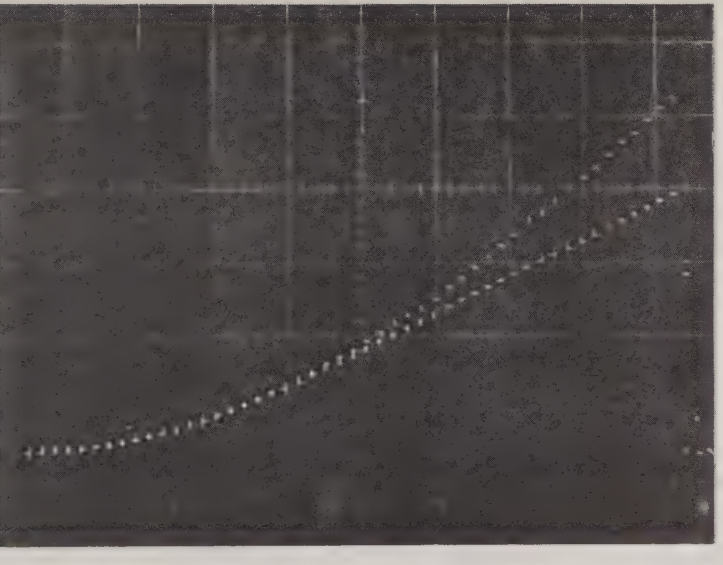
2 - Modulation du Wehnelt de l'oscilloscope. (impulsion de 12 volts d'amplitude ; 1,2 µs de durée).

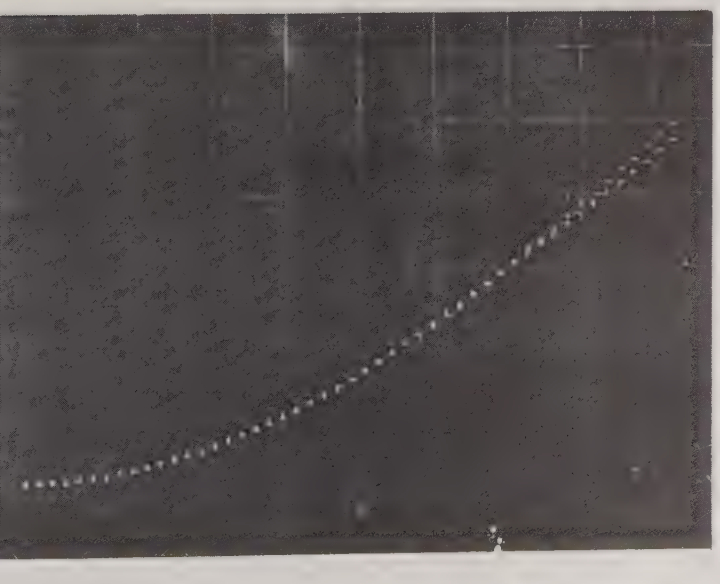
3 - Courbe i = f(v) avec marquage du centre de chaque pas.

4 - Après réglage de l'intensité lumineuse, courbe de référence prête à être utilisée.

Fig.- 16







Trois phases au cours du réglage d'un élément.

On distingue la courbe référence, et, sur la caractéristique de l'élément en cours de réglage, la modification à partir d'un certain point.

Fig.- 19

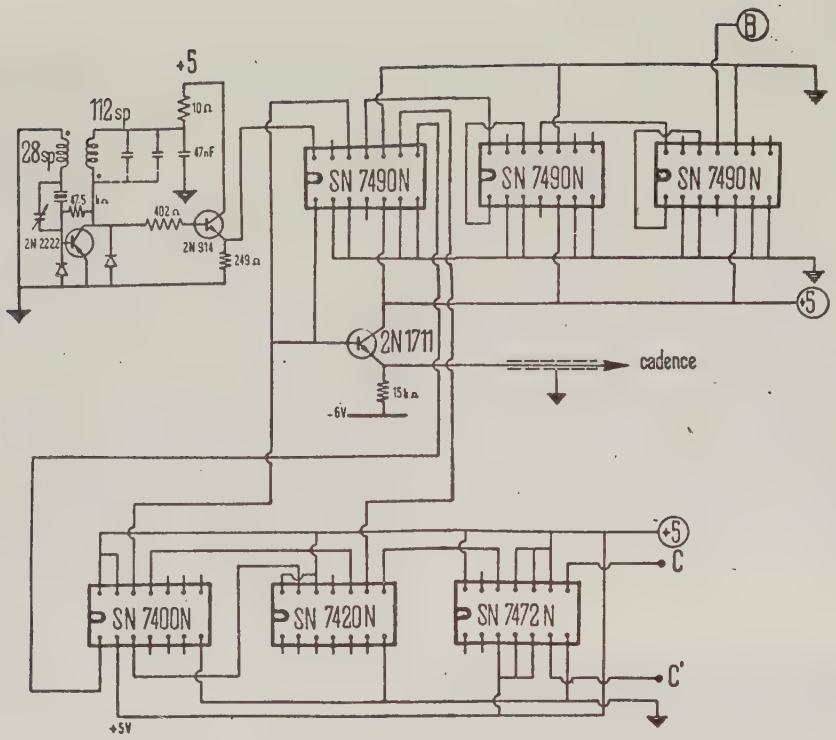


Fig.20- Logique

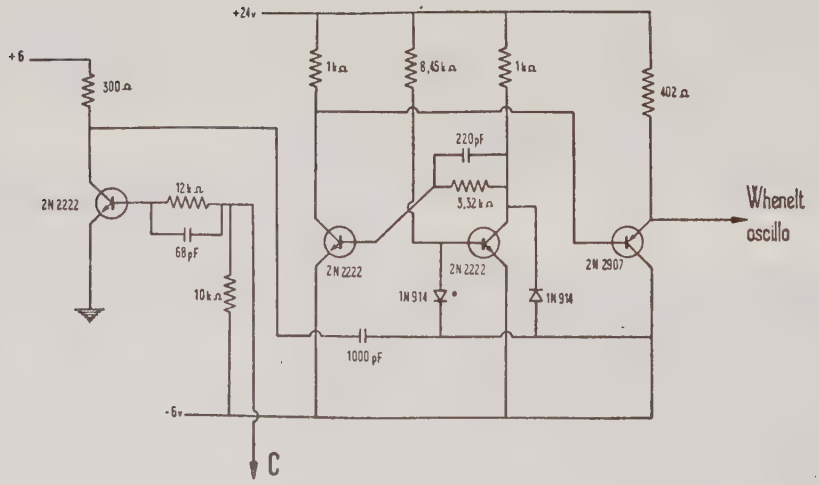


Fig.21- Modulation du Whenelt

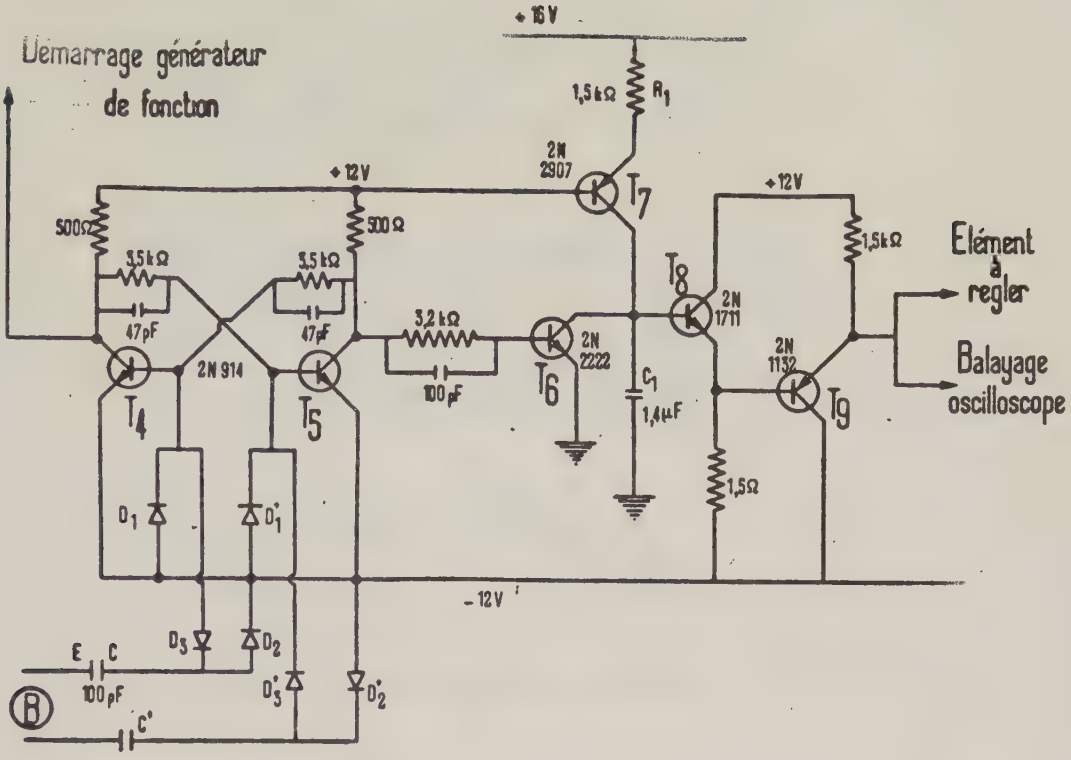


Fig.22- Dent de scie

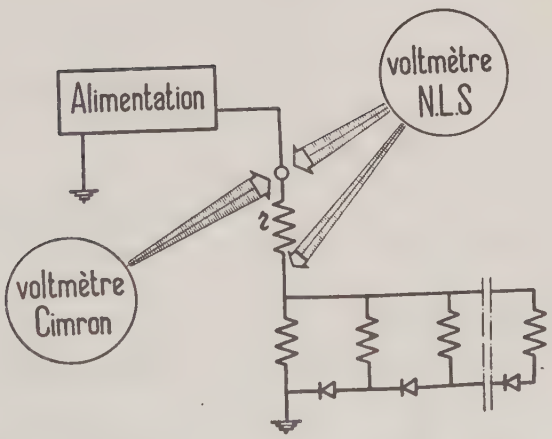


Fig.23- Relevé de $i = f(V)$

Fig.24- Définition du N.I.C.

Fig.25- Propriété du N.I.C.

Fig.26- Propriété du N.I.C.

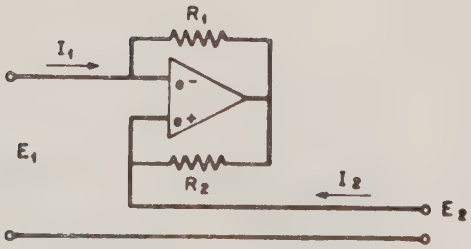


Fig.27- Exemple de N.I.C.

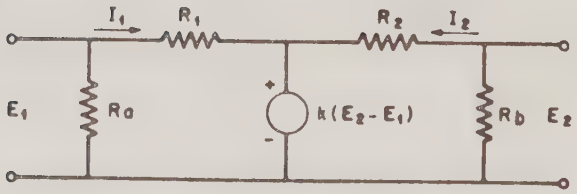


Fig.28- Etude de la stabilité

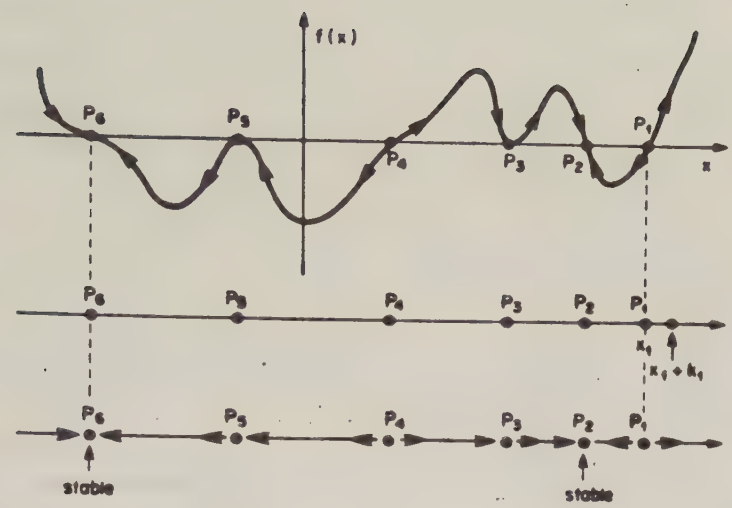


Fig.29- Stabilité

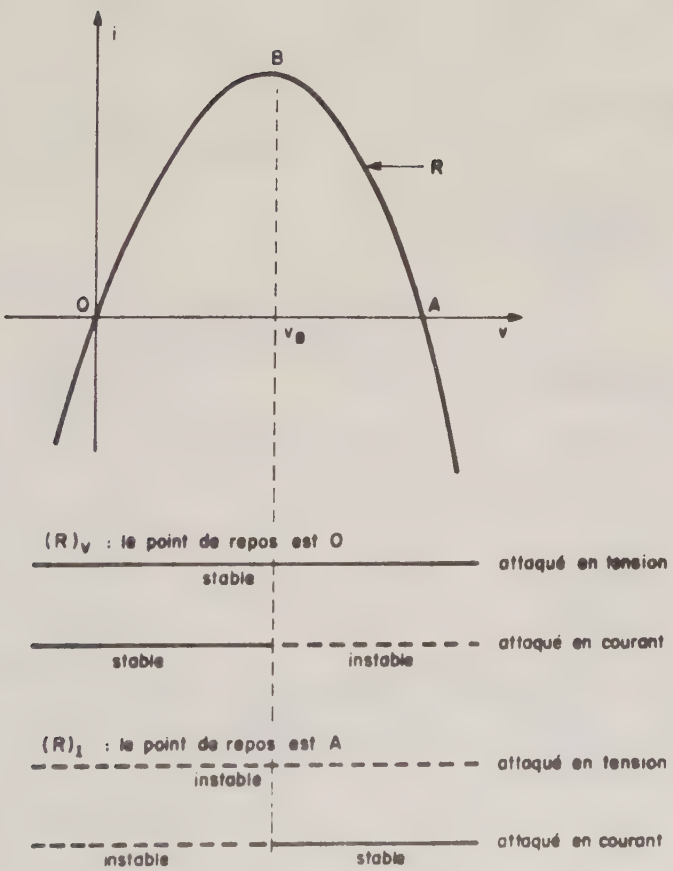


Fig.30- Stabilité dans le cas de sources idéales

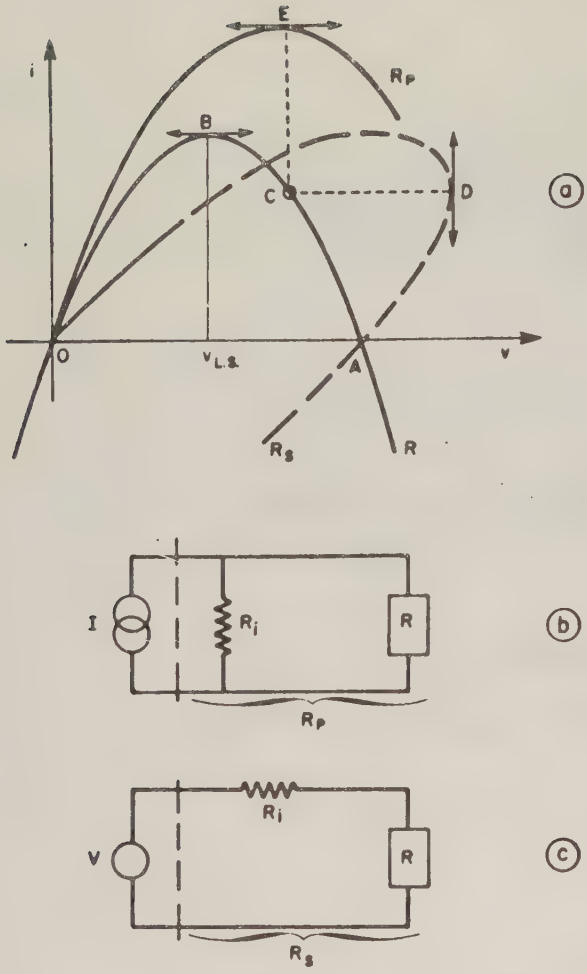


Fig.31- Stabilité dans le cas de source d'impédance R_i

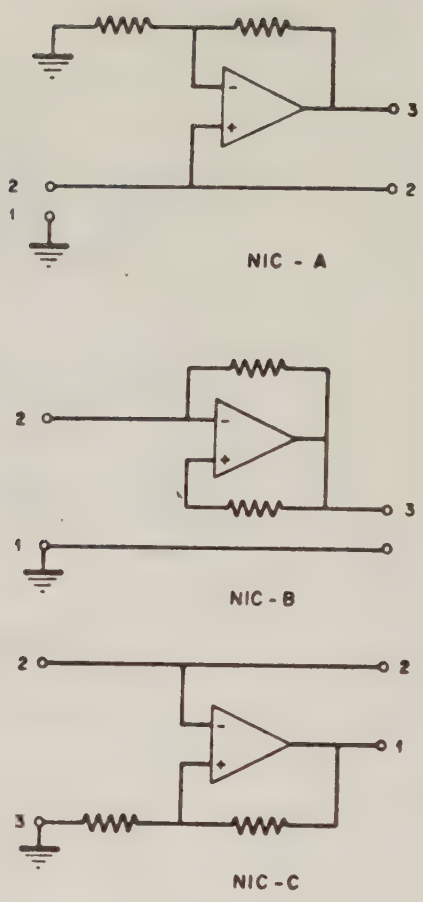


Fig.32- Réalisation de N.I.C.

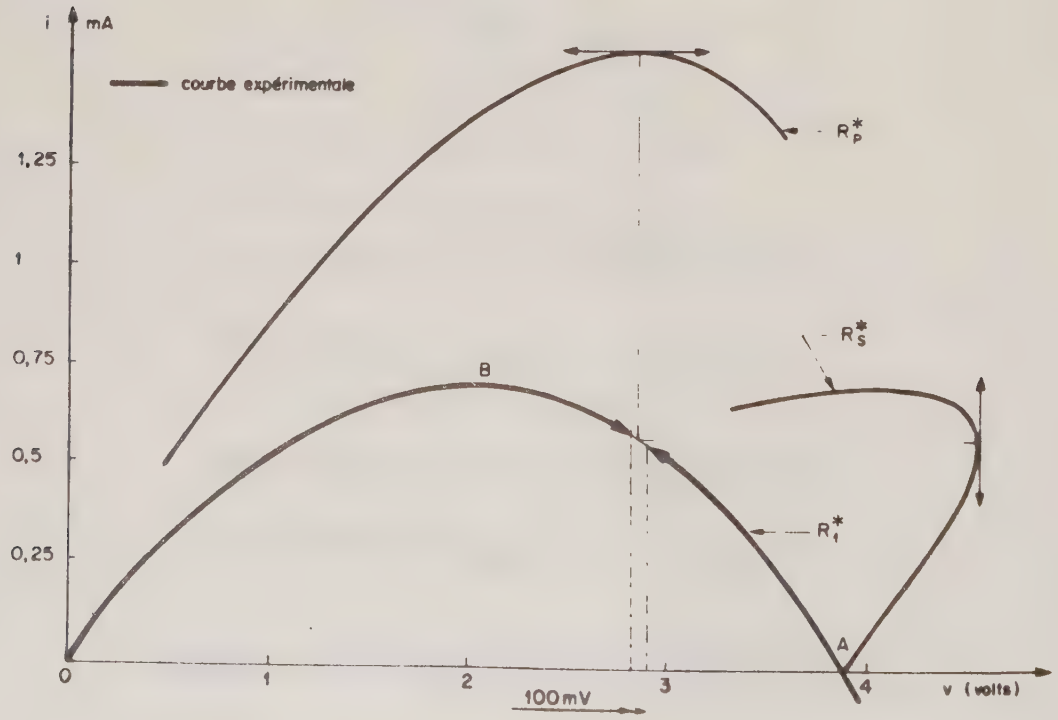


Fig.33- Etude de la stabilité

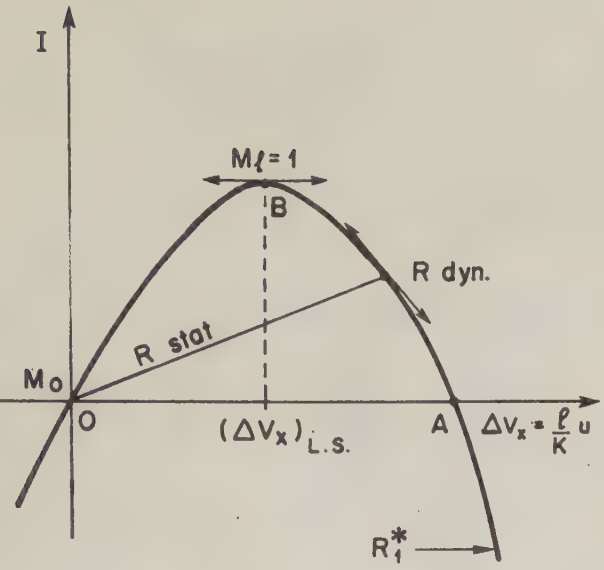


Fig.34- Caractéristique $i = \mathcal{J}(V)$

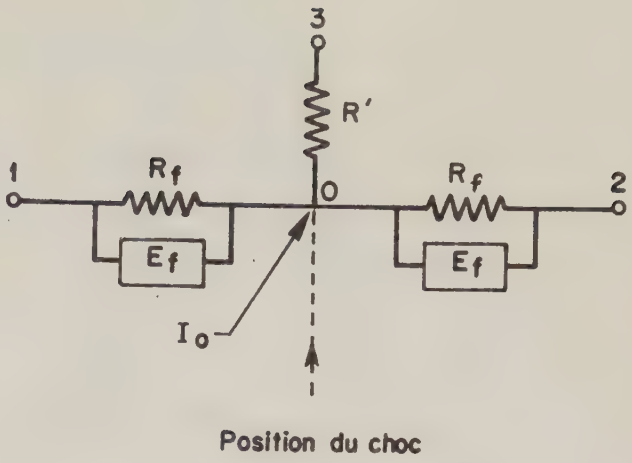


Fig.35- Noeud frontière

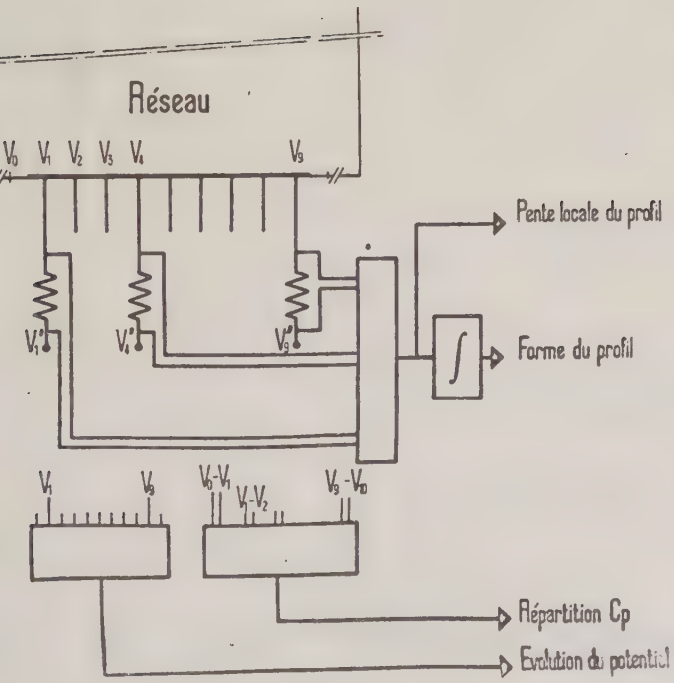


Fig.36- Système de visualisation

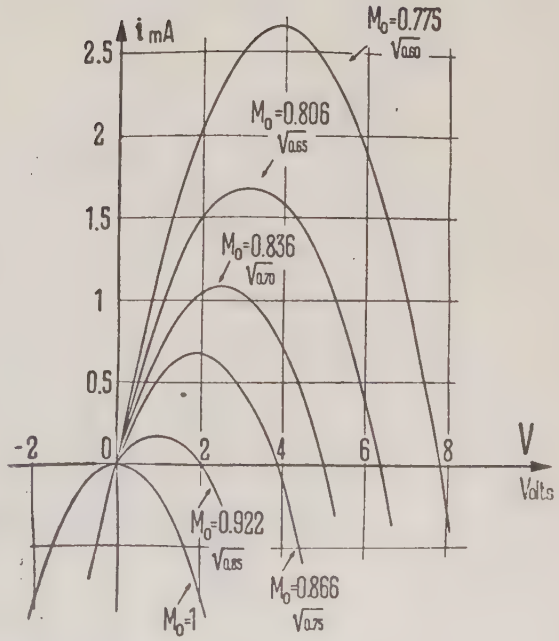


Fig.37- Caractéristiques $i = \mathcal{J}(V)$ pour différentes valeurs de M_o

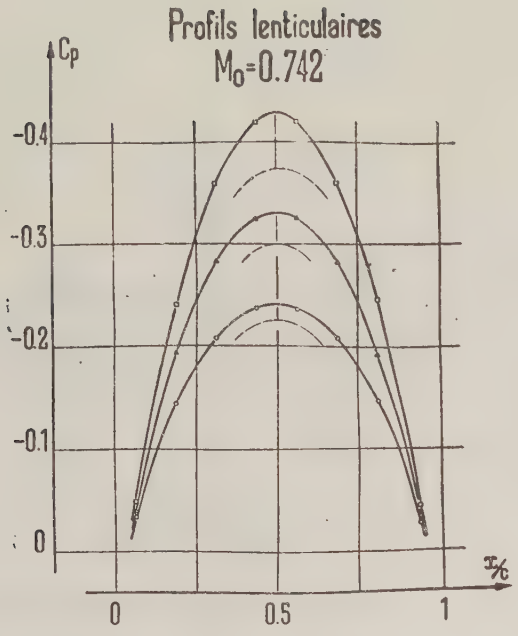


Fig.38

t_k = 6 % ○
k = 8 % △
k = 10 % □
TR. Linéarisée - - -

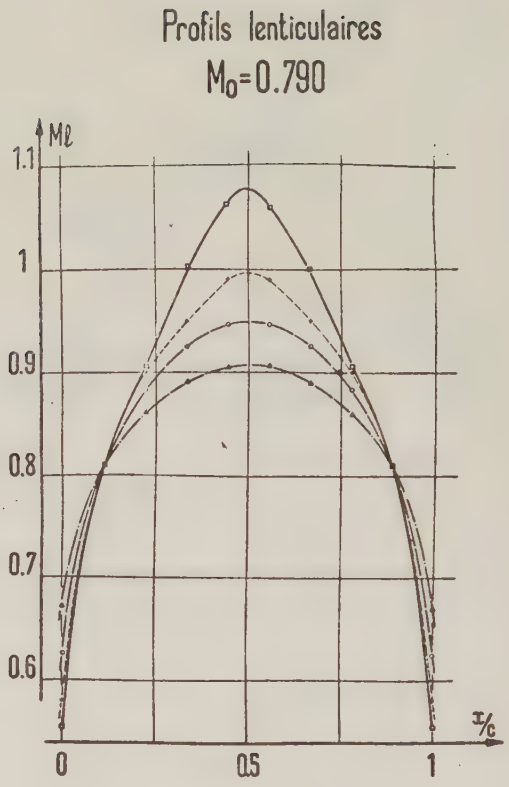


Fig.39 □ k = 12 % + k = 10 % ○ k = 8 % △ k = 6 %

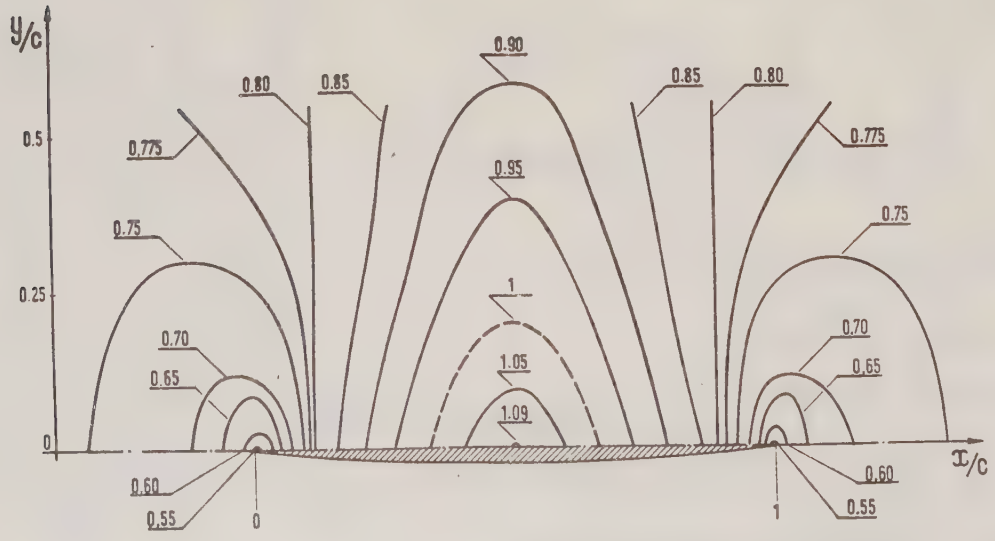


Fig.40- Champ aérodynamique autour d'un profil lenticulaire 12% à M_0 = 0,790

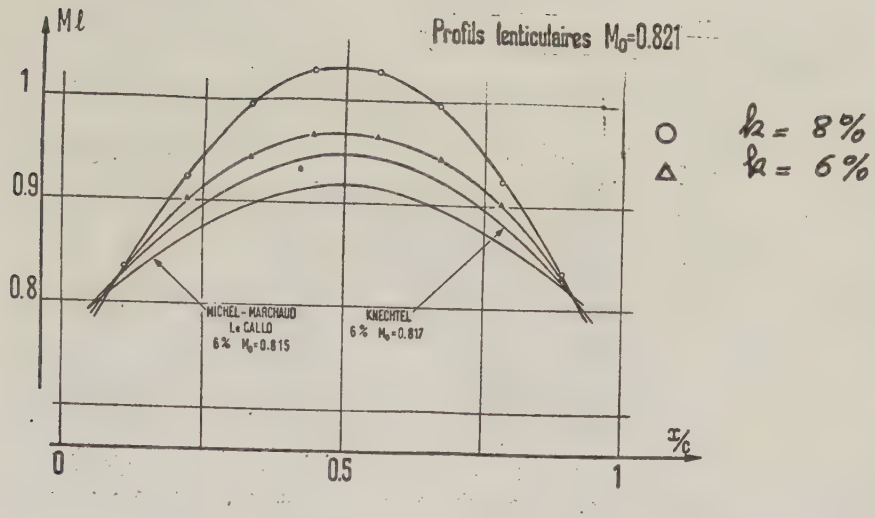


Fig.41

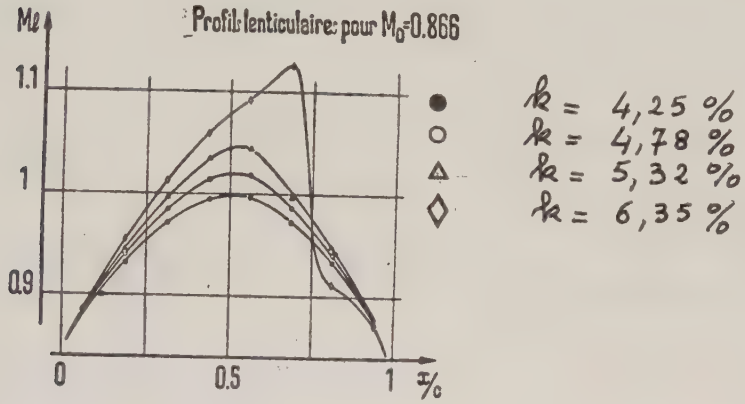


Fig.42

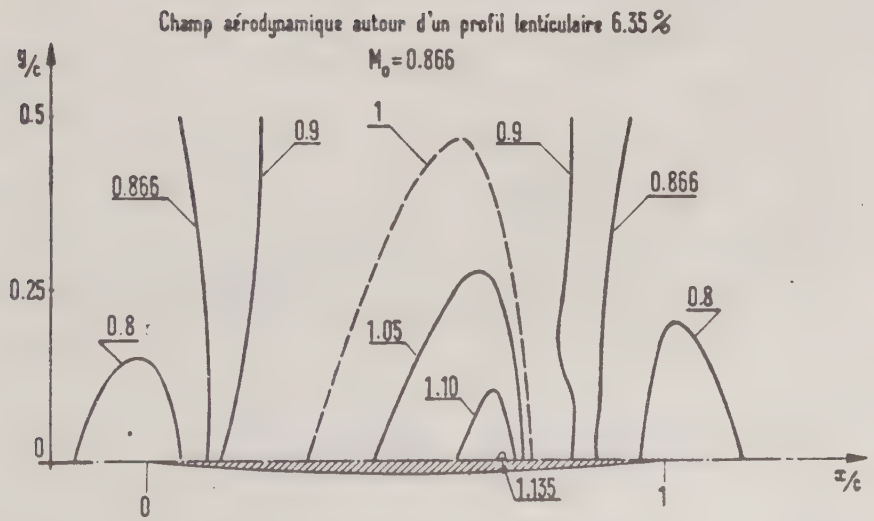


Fig.43

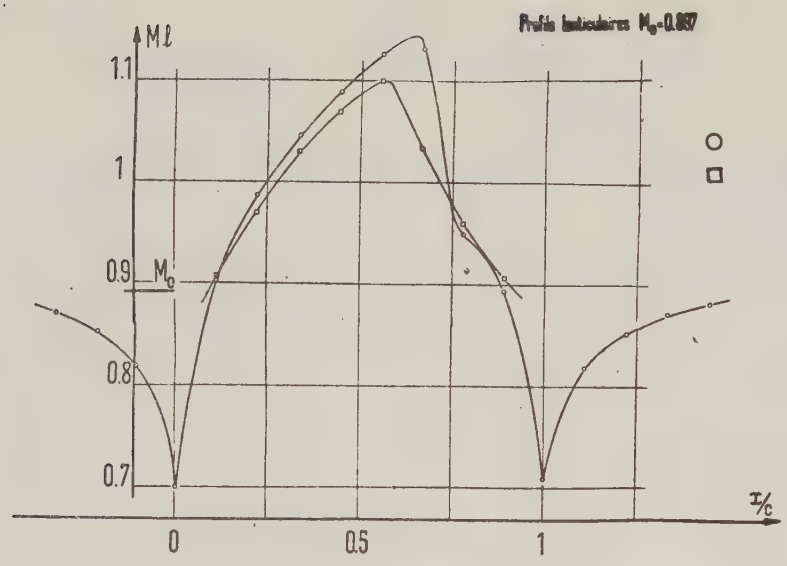

Profils lenticulaires M_0=0.897
Ml
1.1
1
0.9
M_0
0.8
0.7
0
0.5
1
x/c
k = 6,16 %
k = 5,3 %

Fig.44

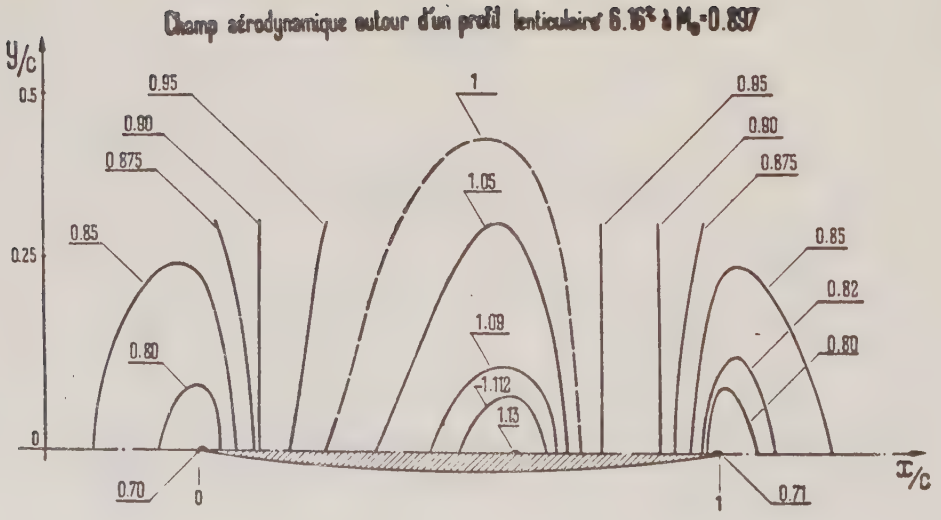

Champ aérodynamique autour d'un profil lenticulaire 6.16% à M_0=0.897
y/c
0.5
0.25
0
0.95
0.90
0.875
0.85
0.80
1
1.05
1.09
1.112
1.13
0.85
0.80
0.875
0.85
0.82
0.80
0.70
0
1
0.71
x/c

Fig.45

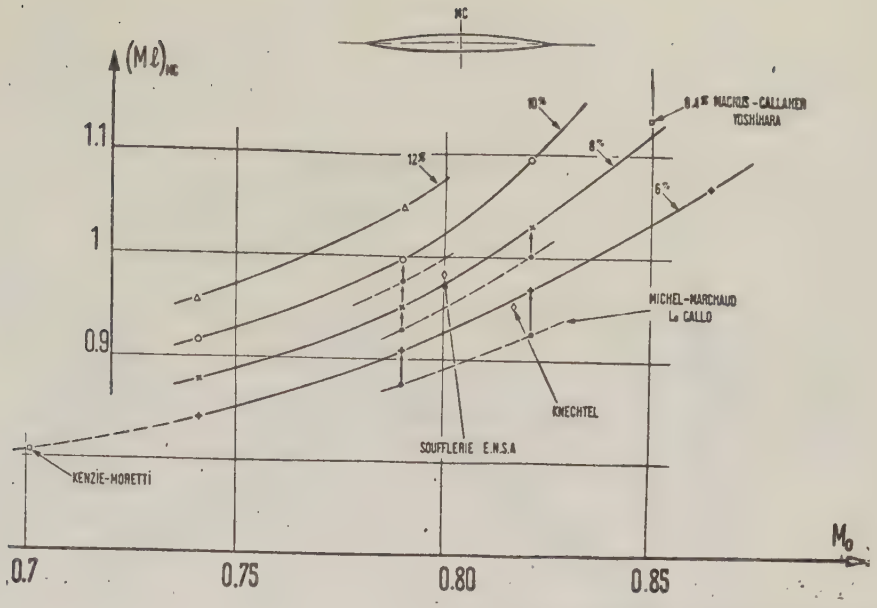
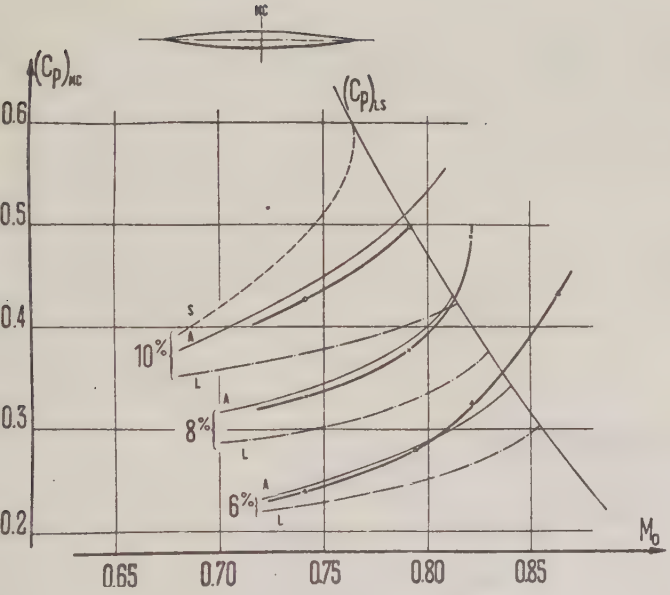


Fig.46- Profils lenticulaires



S Spraiter
A Asaka
L Linéarisé
Réseau

g.47- Profils lenticulaires

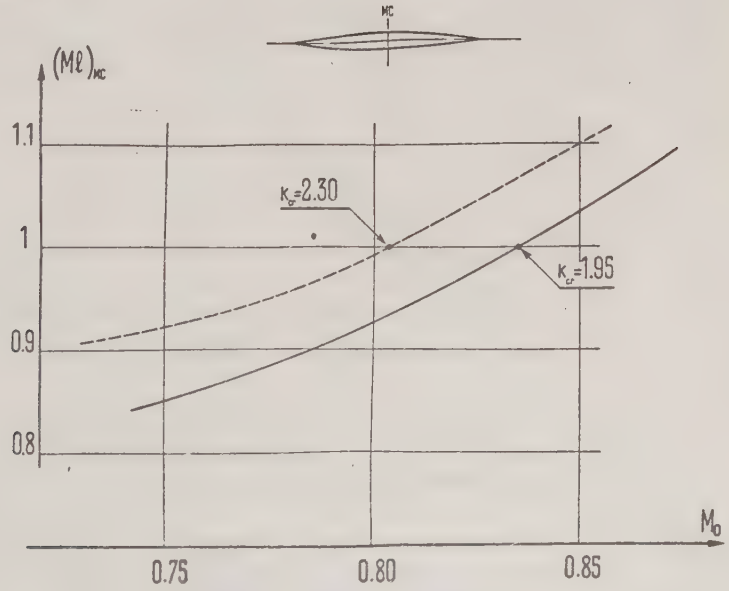


Fig.48- Profil lenticulaire 6%

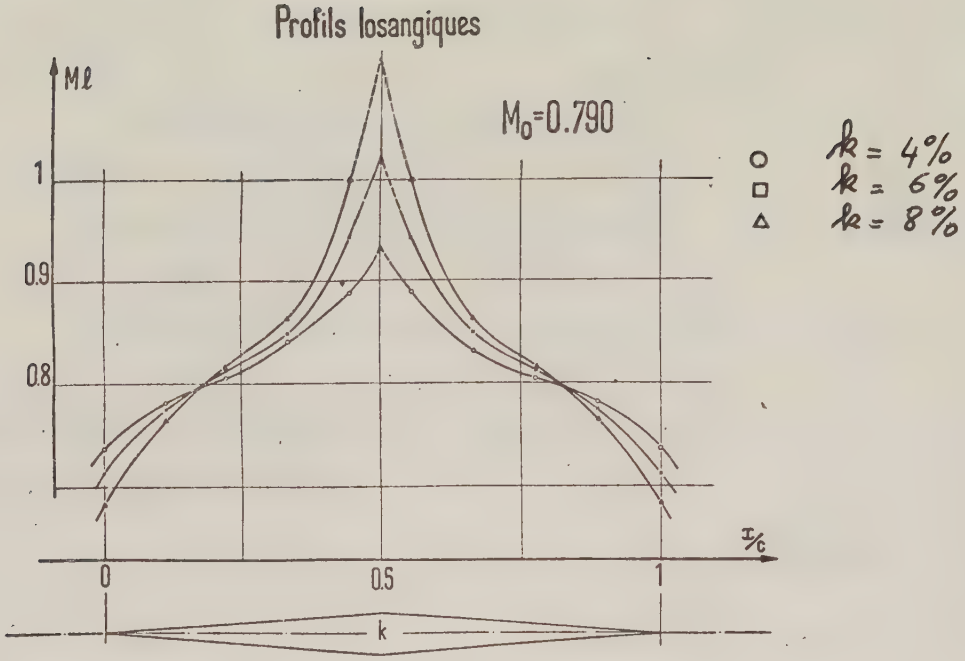

Profils losangiques
Mℓ
M_0=0.790
1
0.9
0.8
x/c
0
0.5
1
k
○ k = 4%
□ k = 6%
△ k = 8%

Fig.49

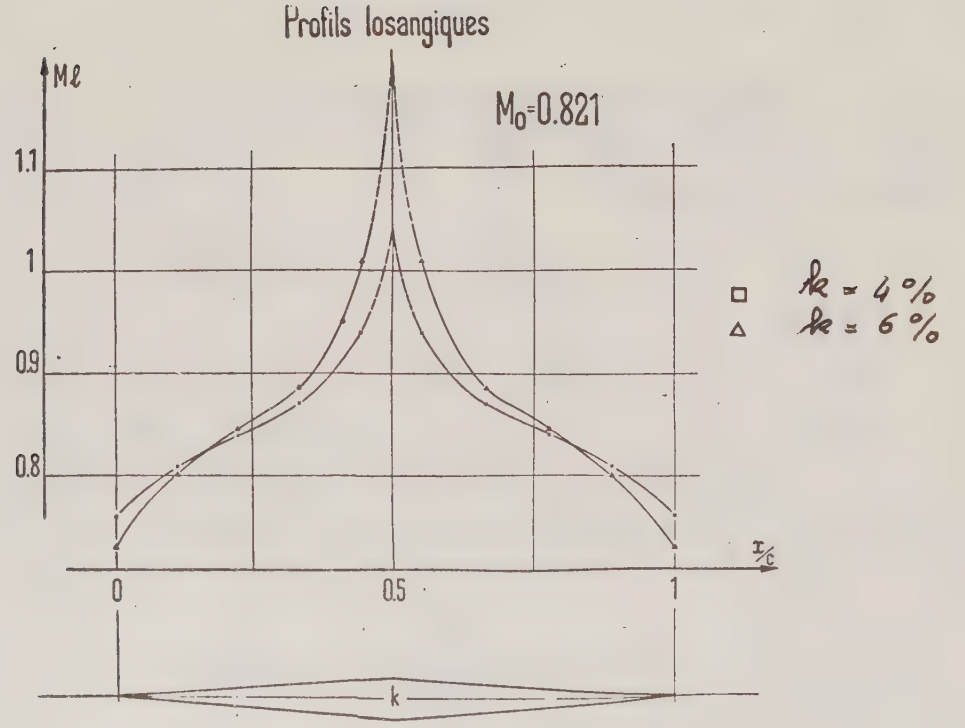

Profils losangiques
Mℓ
M_0=0.821
1.1
1
0.9
0.8
x/c
0
0.5
1
k
□ k = 4%
△ k = 6%

Fig.50

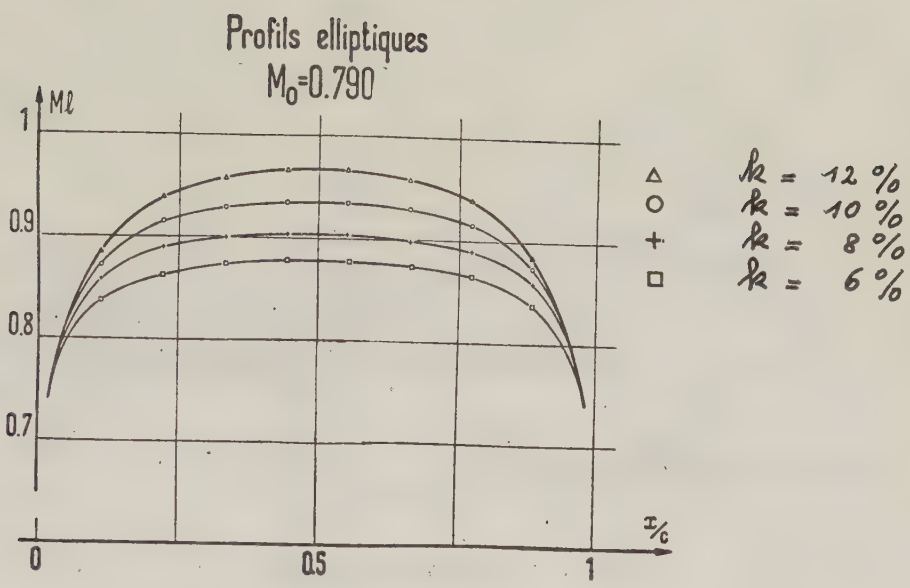

Profils elliptiques
M_0=0.790
Mℓ
1
0.9
0.8
0.7
0
0.5
1
x/c
△ k = 12 %
○ k = 10 %
+ k = 8 %
□ k = 6 %

Fig.51

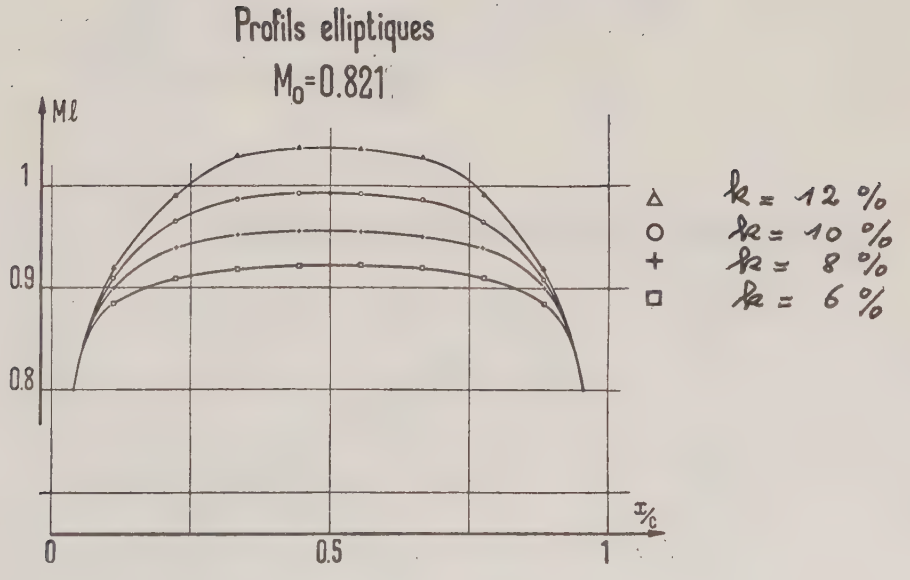

Profils elliptiques
M_0=0.821
Mℓ
1
0.9
0.8
0
0.5
1
x/c
△ k = 12 %
○ k = 10 %
+ k = 8 %
□ k = 6 %

Fig.52

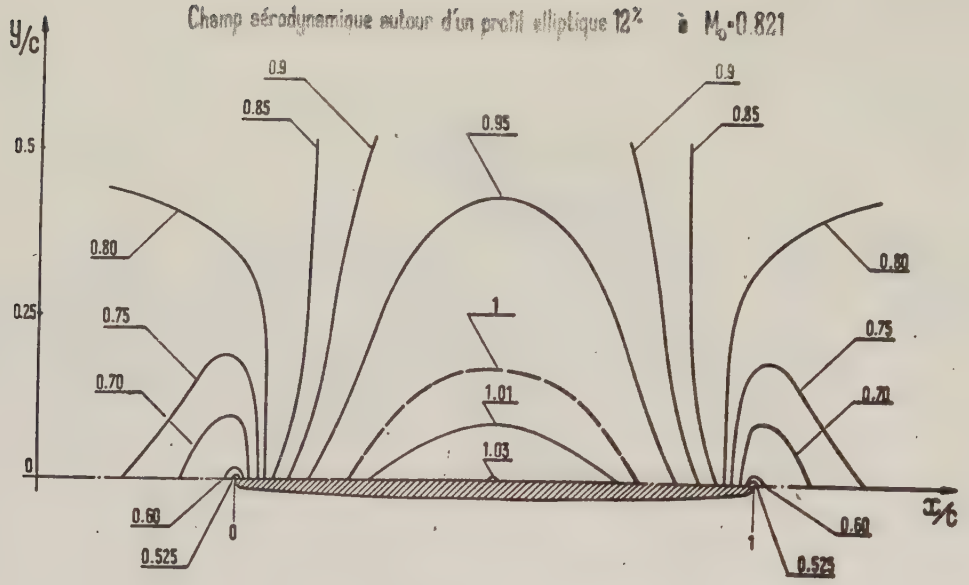


Fig.53

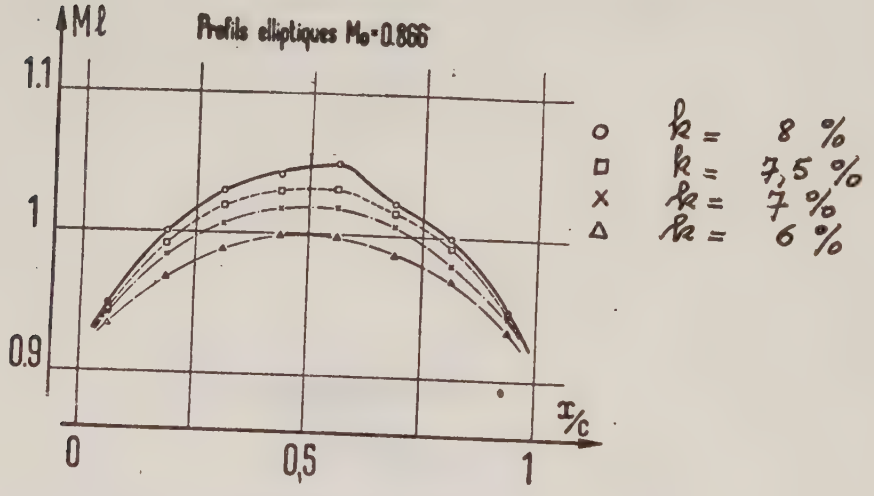


Fig.54

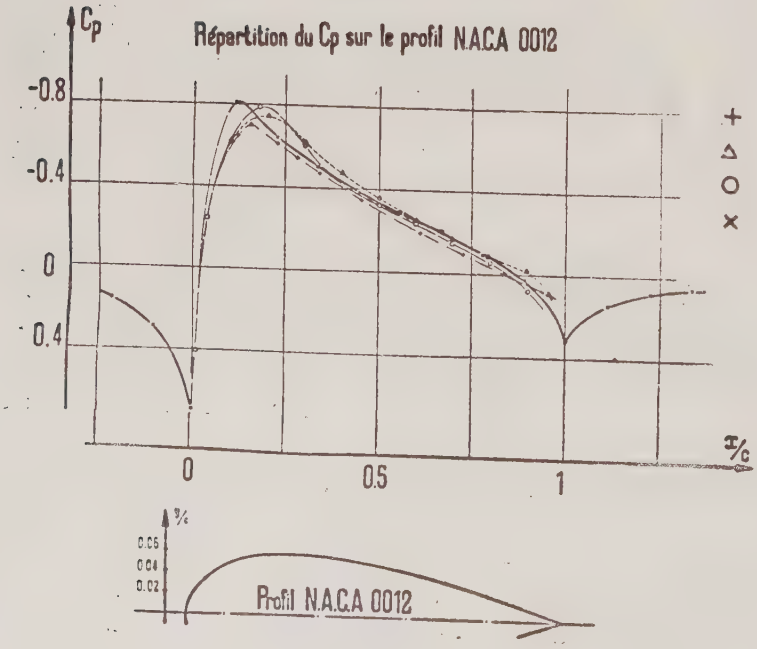
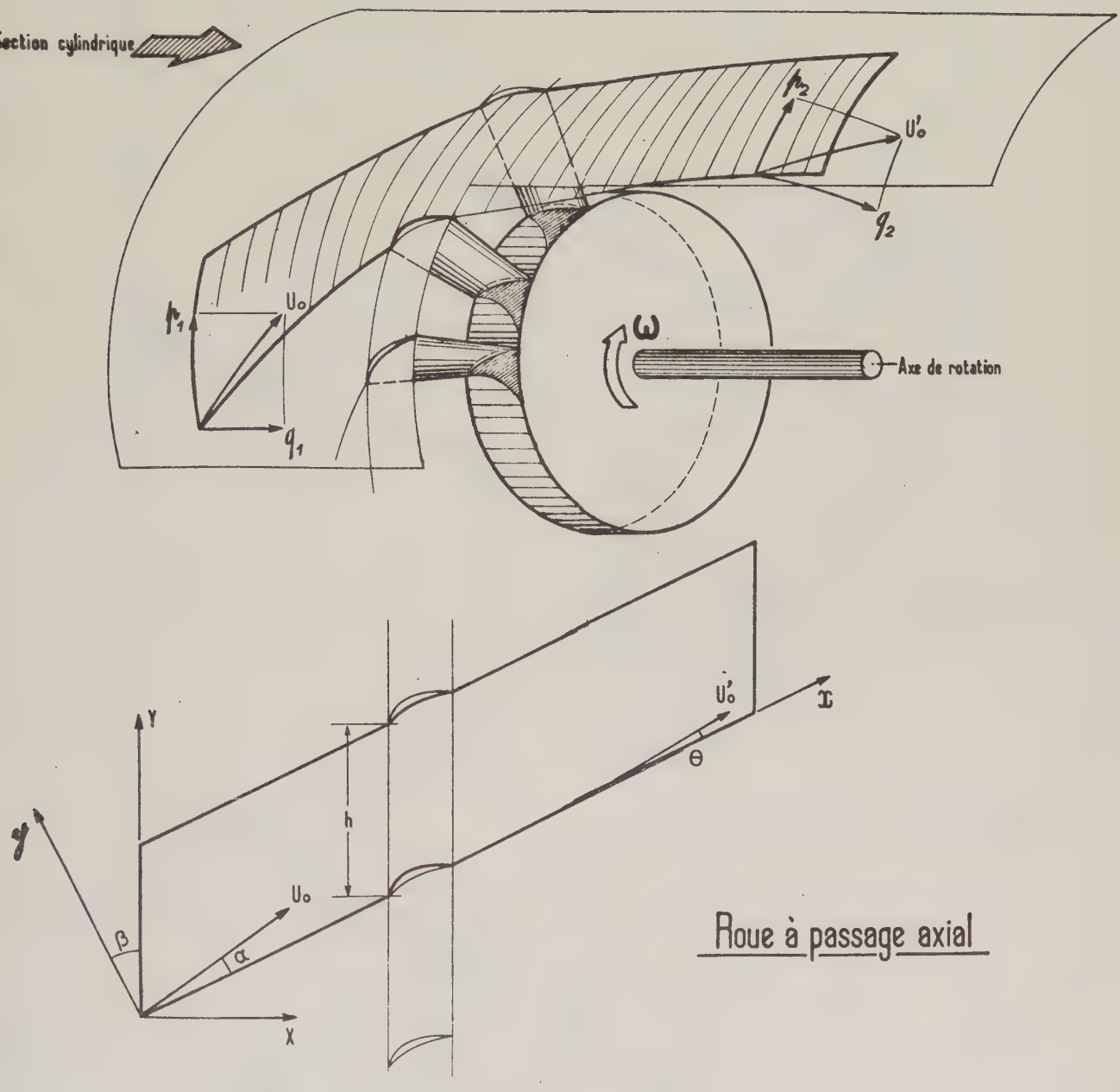


Fig.55



Roue à passage axial

Fig.56

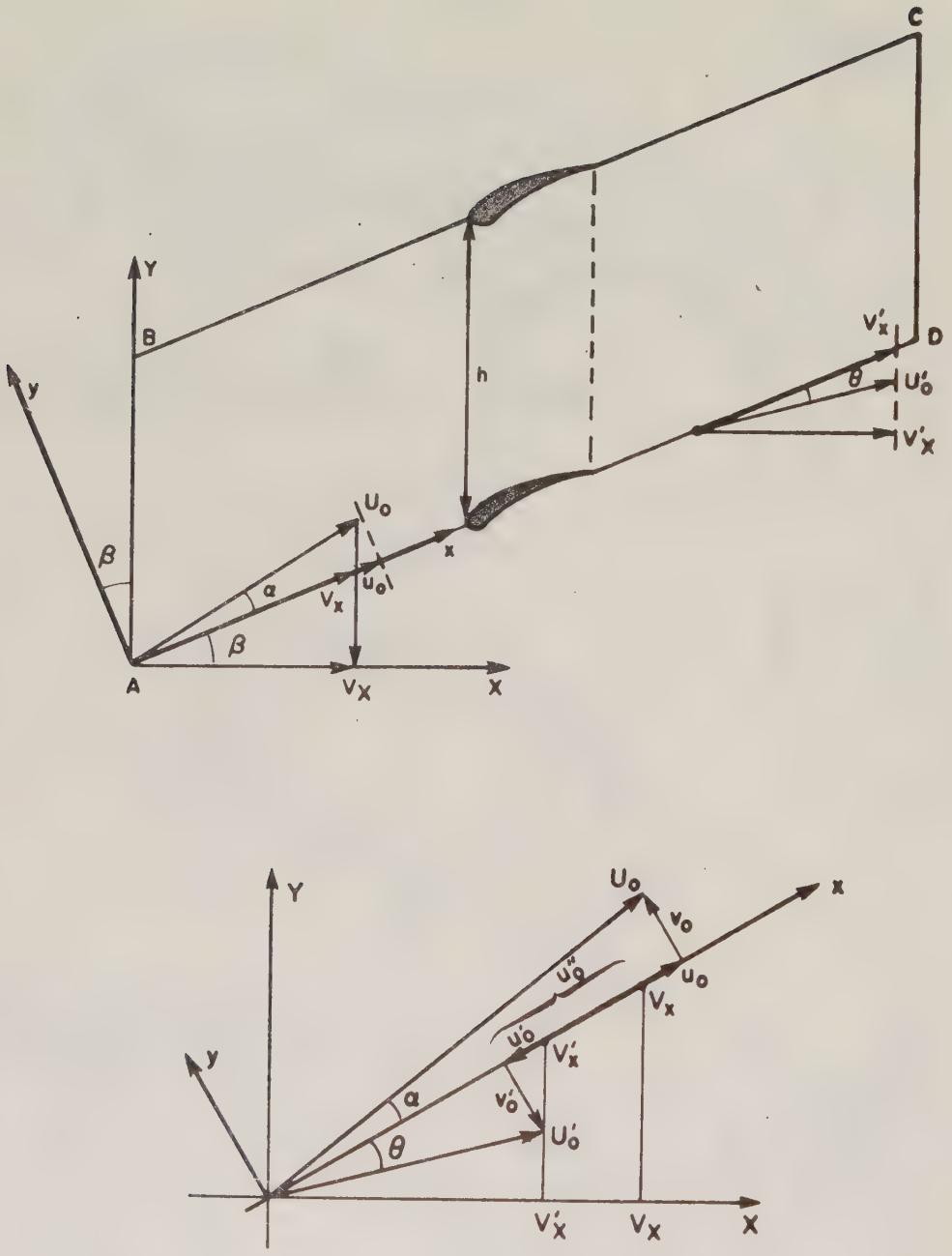


Fig.57- Grille d'aubes

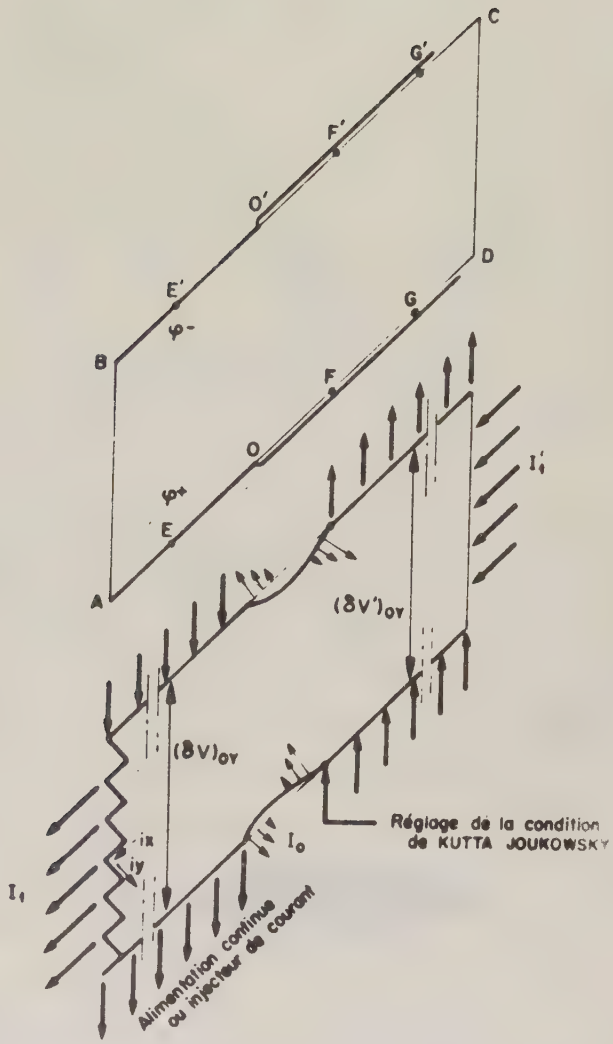


Fig.58- Conditions aux limite

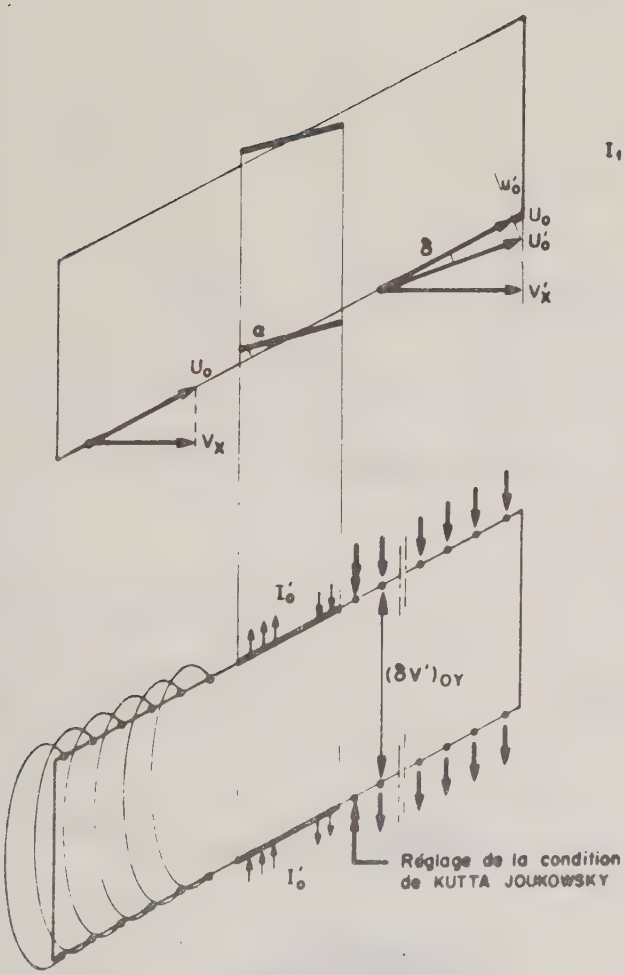


Fig.59- Linéarisation sur U_o

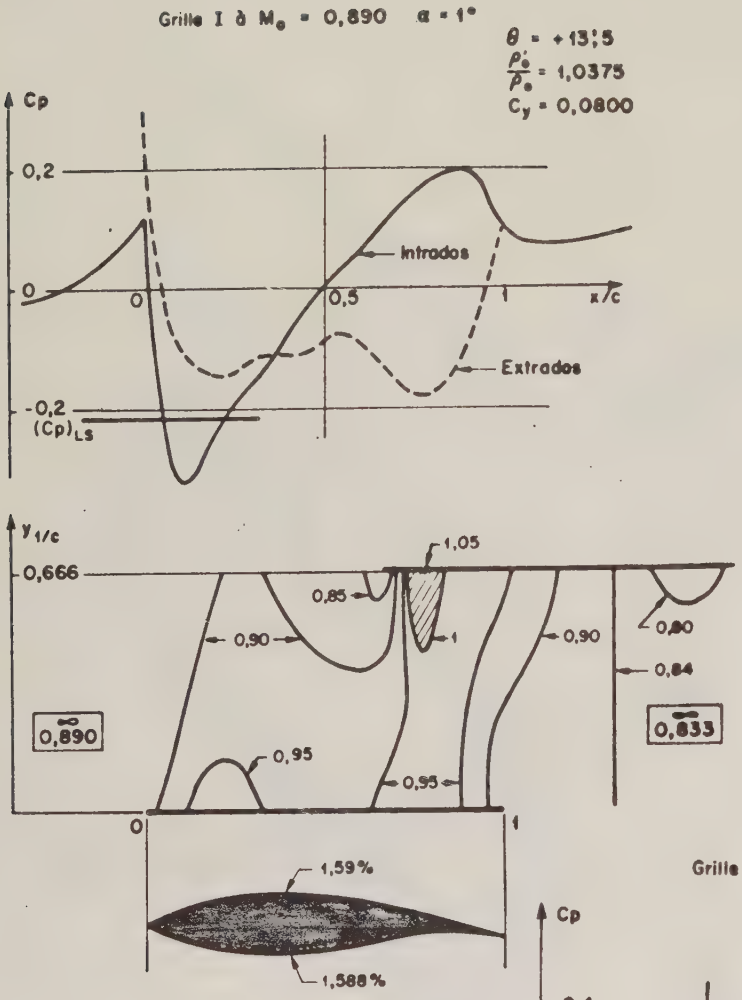

Grille I à M_o = 0,890 α = 1°
θ = +13,5
$\frac{\rho_2}{\rho_o}$ = 1,0375
C_y = 0,0800
Cp
0,2
0
-0,2
$(Cp)_{LS}$
0
0,5
1
x/c
Intrados
Extrados
y 1/c
0,666
1,05
0,85
0,90
1
0,90
0,80
0,84
0,95
0,95
0,890
0,833
1,59%
1,588%

Fig.60

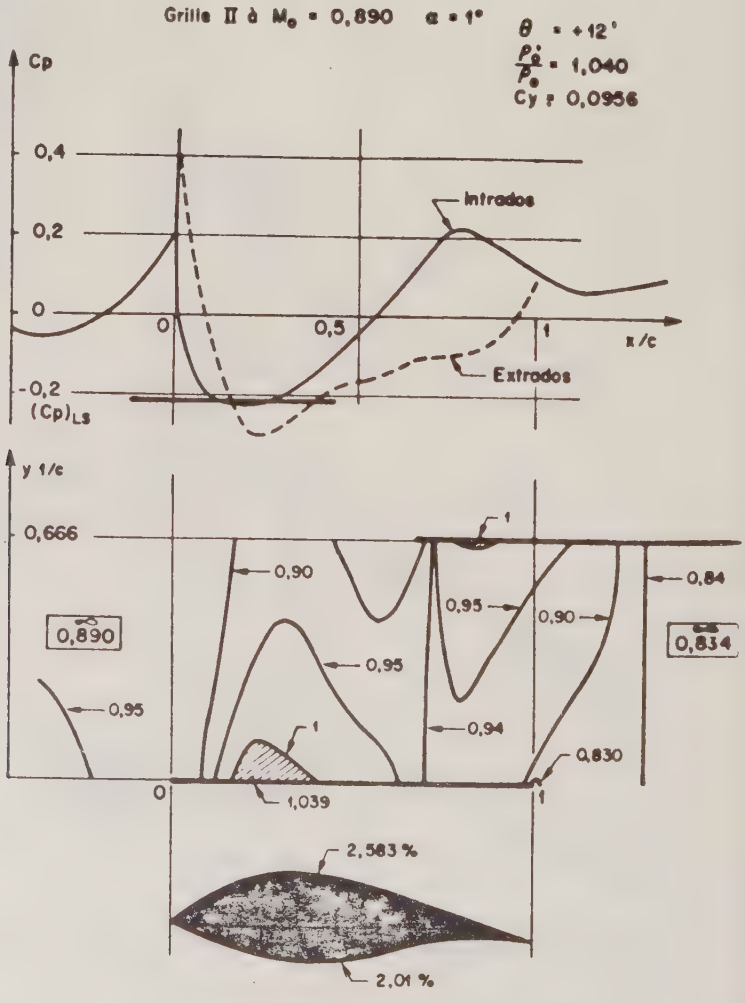

Grille II à M_o = 0,890 α = 1°
θ = +12°
$\frac{\rho_2}{\rho_o}$ = 1,040
C_y = 0,0956
Cp
0,4
0,2
0
-0,2
$(Cp)_{LS}$
0
0,5
1
x/c
Intrados
Extrados
y 1/c
0,666
1
0,90
0,95
0,90
0,84
0,890
0,95
0,95
0,94
0,834
1
0,830
1,039
2,583%
2,01%

Fig.61

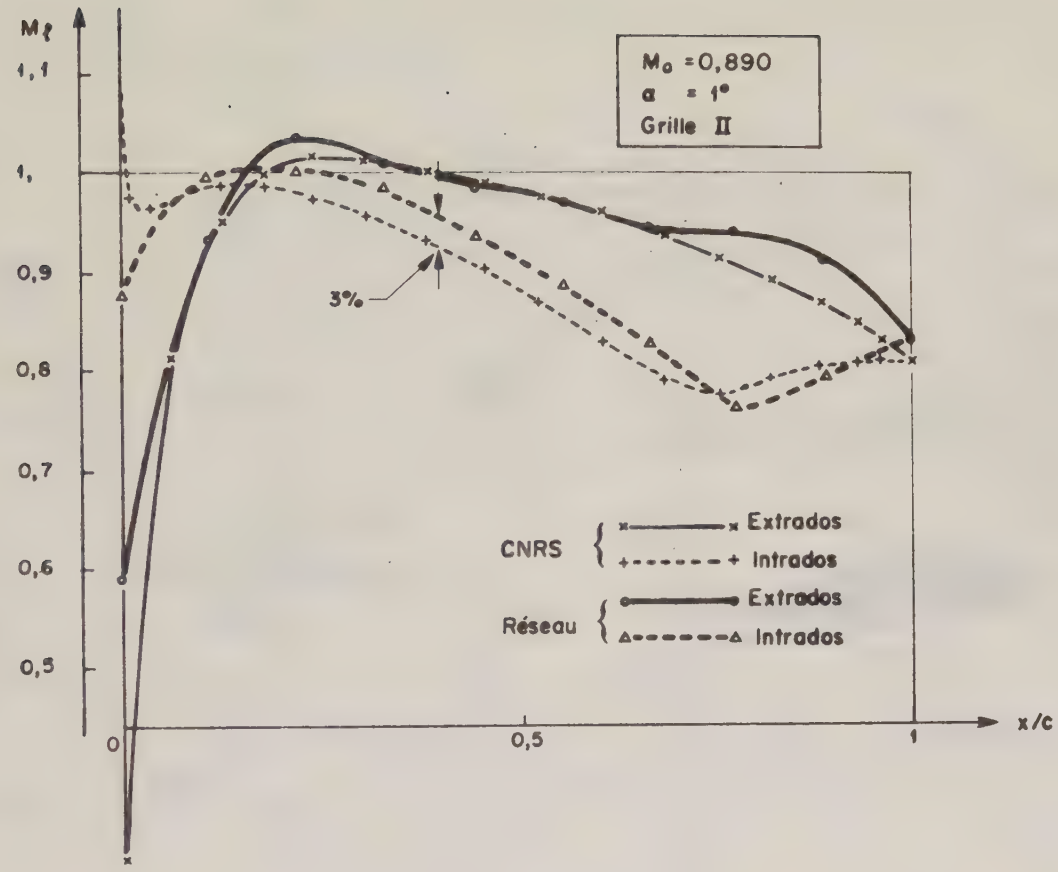
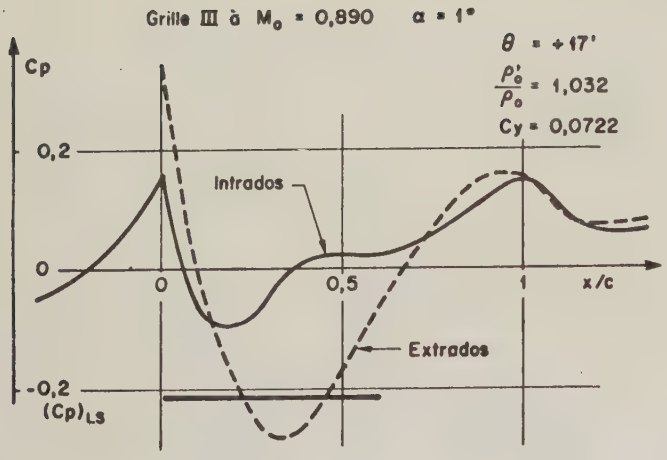


Fig.62- Grille II. Comparaison des résultats


Grille III à M_o = 0,890 α = 1°
θ = +17'
$\frac{\rho'_o}{\rho_o}$ = 1,032
Cy = 0,0722
Cp
0,2
0
-0,2
$(Cp)_{LS}$
Intrados
Extrados
0
0,5
1
x/c

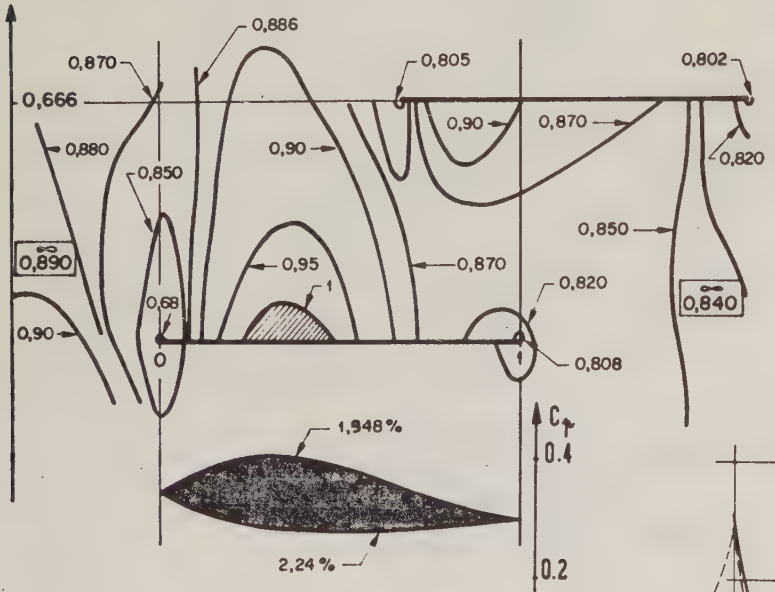

0,886
0,870
0,805
0,802
0,666
0,880
0,90
0,870
0,820
0,850
0,850
0,95
0,870
0,820
0,68
0,808
0,90
1,948 %
2,24 %

Fig.63

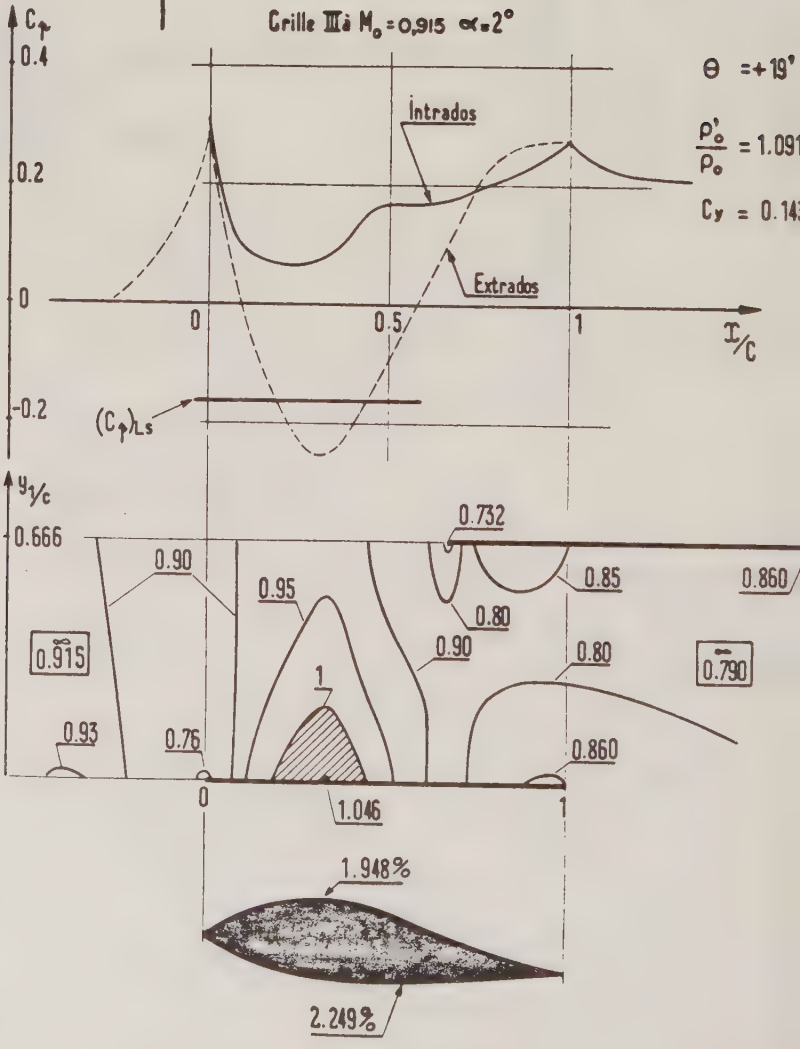

Grille III à M_o = 0,915 α = 2°
θ = +19°
$\frac{\rho'_o}{\rho_o}$ = 1.091
Cy = 0.14
C_p
0.4
0.2
0
-0.2
$(C_p)_{LS}$
Intrados
Extrados
0
0.5
1
x/c
$y_{1/c}$
0.666
0.732
0.90
0.95
0.85
0.860
0.80
0.915
0.90
0.80
0.790
1
0.93
0.76
0.860
0
1.046
1
1.948%
2.249%

Fig.64

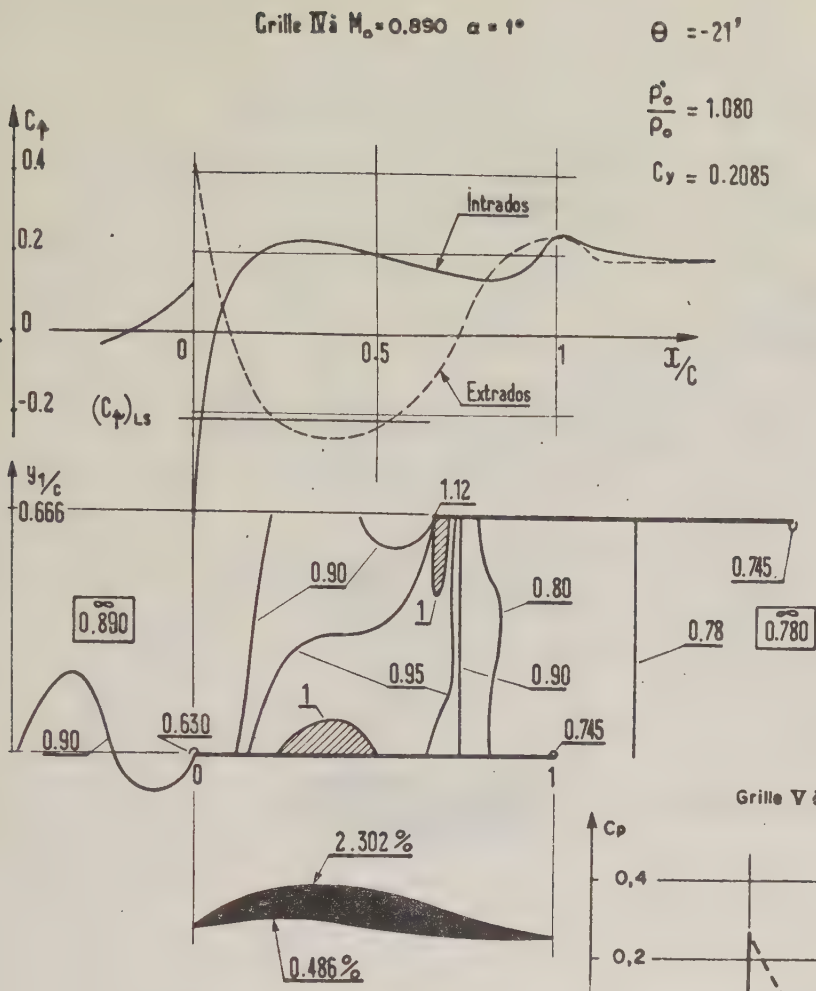

Grille IV à M_o = 0.890 α = 1°
θ = -21°
$\frac{p'_o}{p_o}$ = 1.080
C_y = 0.2085
C_p
0.4
0.2
0
-0.2
Intrados
Extrados
$(C_p)_{LS}$
0
0.5
1
x/c
$y_{1/c}$
0.666
1.12
0.90
0.80
0.745
0.78
0.890
0.780
0.95
0.630
2.302 %
0.486 %

Fig.65

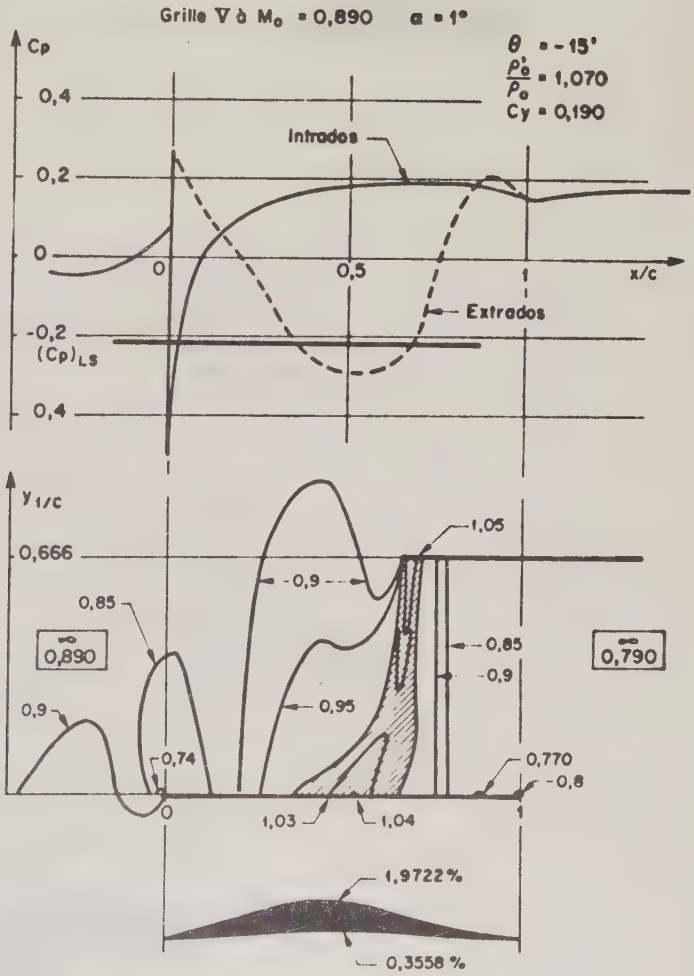

Grille V à M_o = 0,890 α = 1°
θ = -15°
$\frac{p'_o}{p_o}$ = 1,070
C_y = 0,190
Cp
0,4
0,2
0
-0,2
$(Cp)_{LS}$
Intrados
Extrados
0
0,5
1
x/c
$y_{1/c}$
0,666
1,05
0,9
0,85
0,890
0,790
0,95
0,74
0,770
0,8
1,03
1,04
1,9722 %
0,3558 %

Fig.66

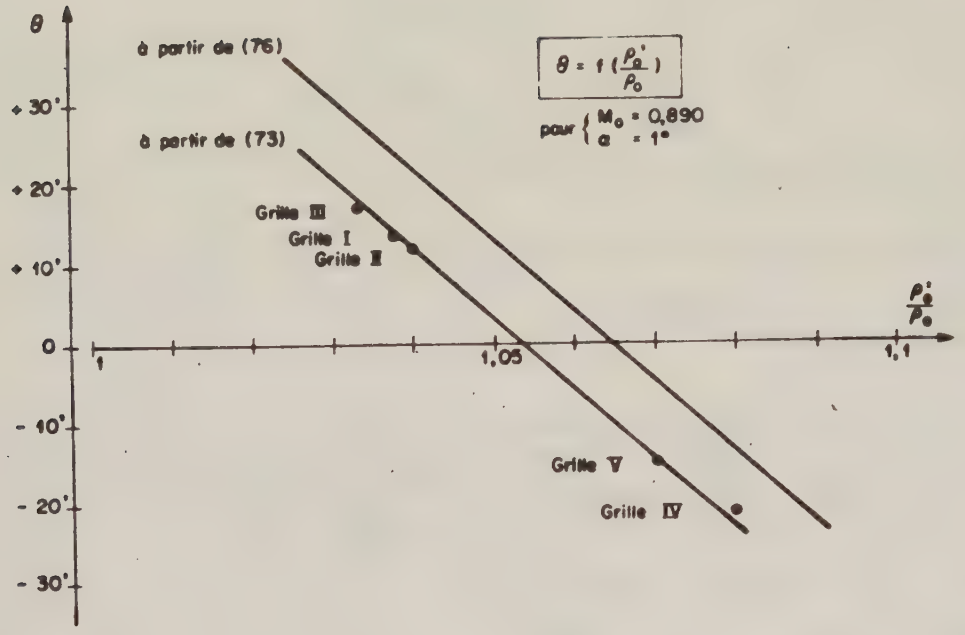


Fig.67 Courbe $\theta = \mathcal{F}\left(\frac{\rho'_o}{\rho_o}\right)$

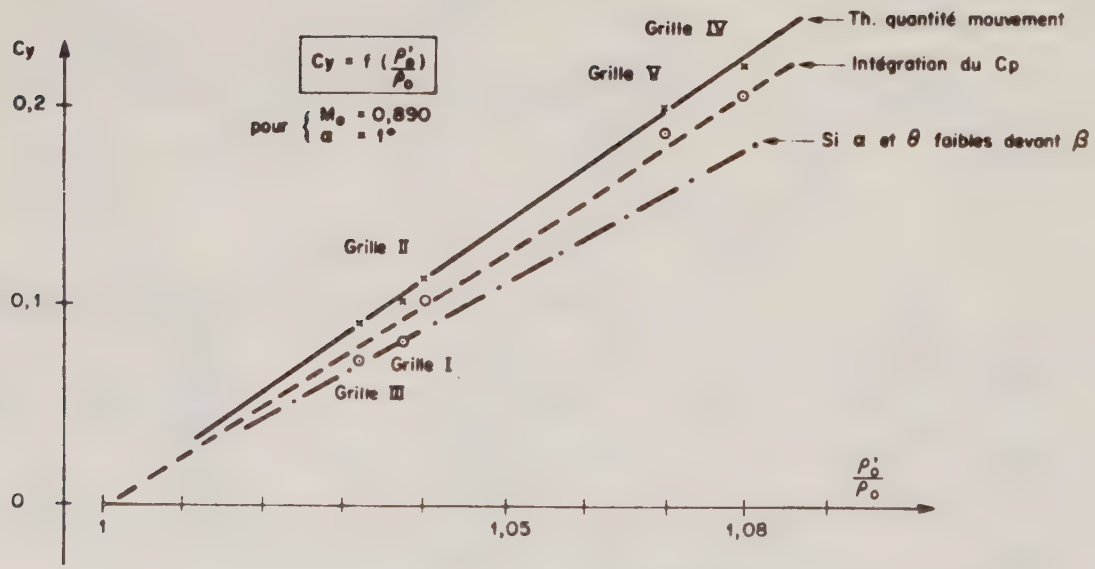


Fig.68- Courbe $Cy = \mathcal{F}\left(\frac{\rho'_o}{\rho_o}\right)$

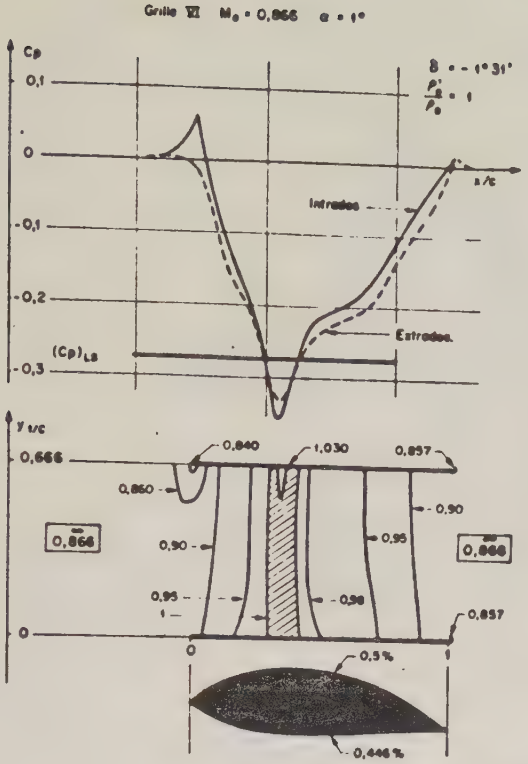


Fig.69

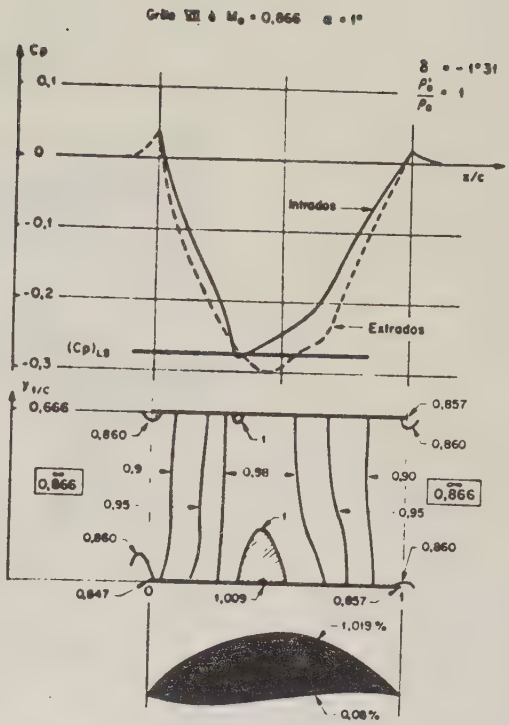


Fig.70

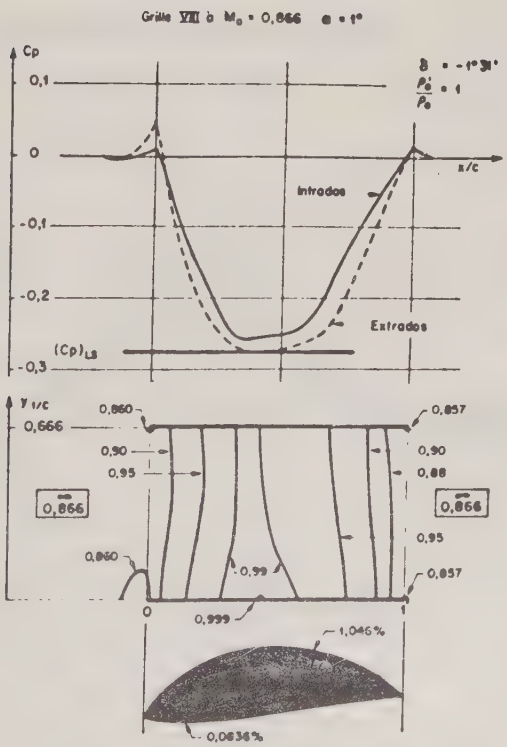


Fig.71

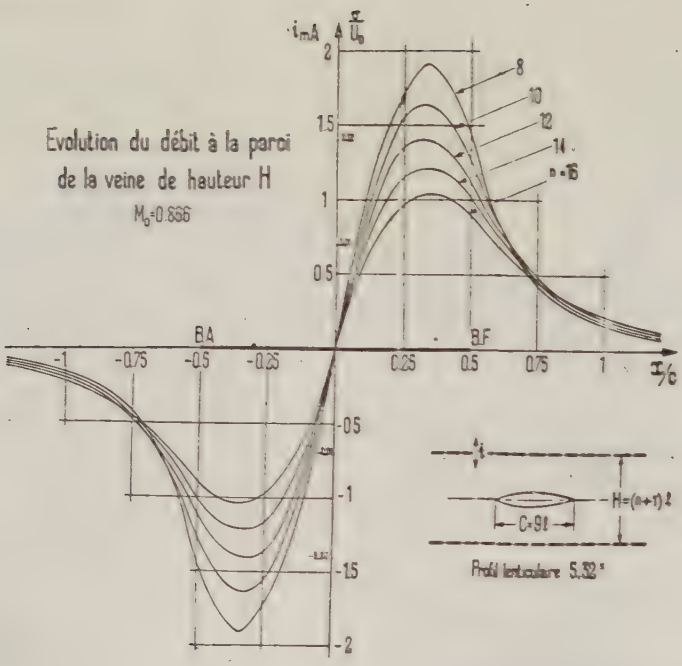

Evolution du débit à la paroi
de la veine de hauteur H
M₀=0.866
i mA
2
1.5
1
0.5
8
10
12
14
n=16
BA
BF
-1
-0.75
-0.5
-0.25
0.25
0.5
0.75
1
-0.5
-1
-1.5
-2
H=(n+1)ℓ
C=9ℓ
Profil lenticulaire 5,32 %

Fig.72

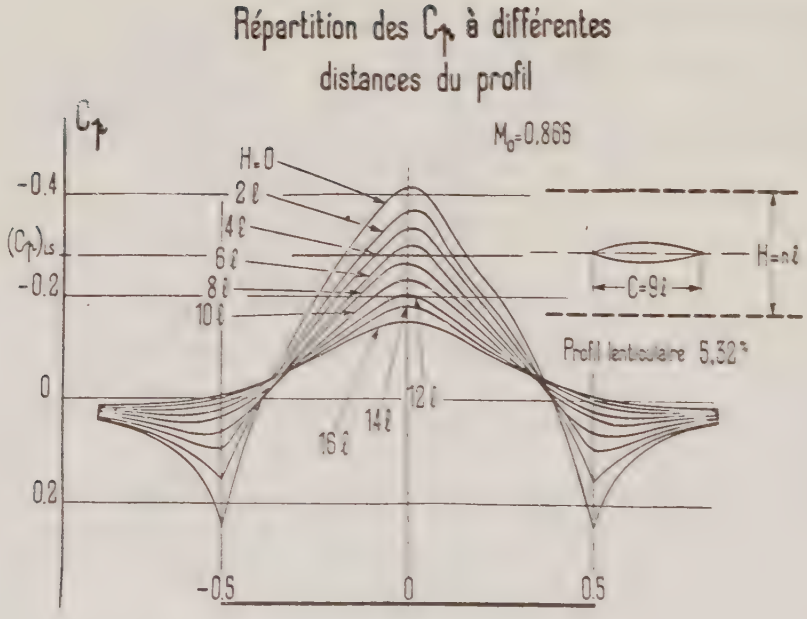

Répartition des Cp à différentes
distances du profil
Cp
M₀=0.866
H=0
2ℓ
4ℓ
6ℓ
8ℓ
10ℓ
12ℓ
14ℓ
16ℓ
-0.4
(Cp)ls
-0.2
0
0.2
-0.5
0
0.5
H=nℓ
C=9ℓ
Profil lenticulaire 5,32 %

Fig.73

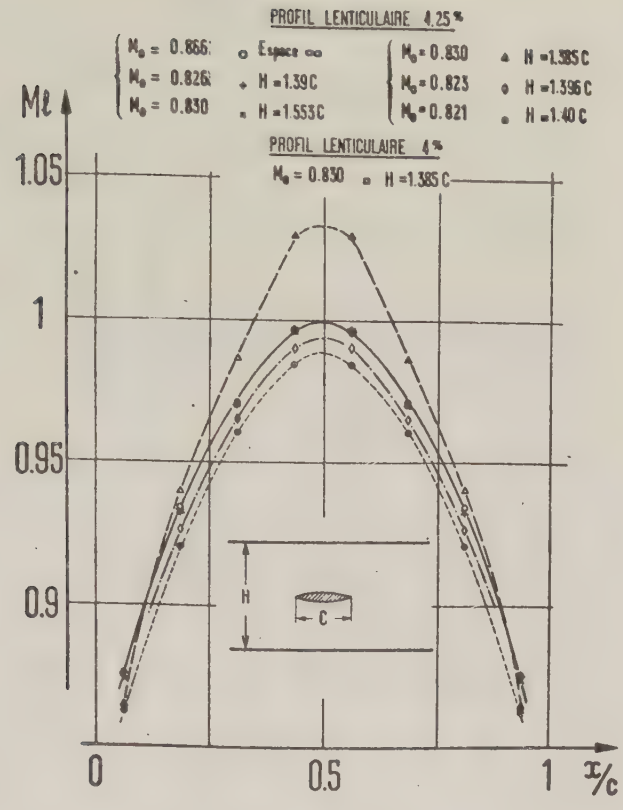


Fig.74- Correction de paroi
Répartition du Mach local

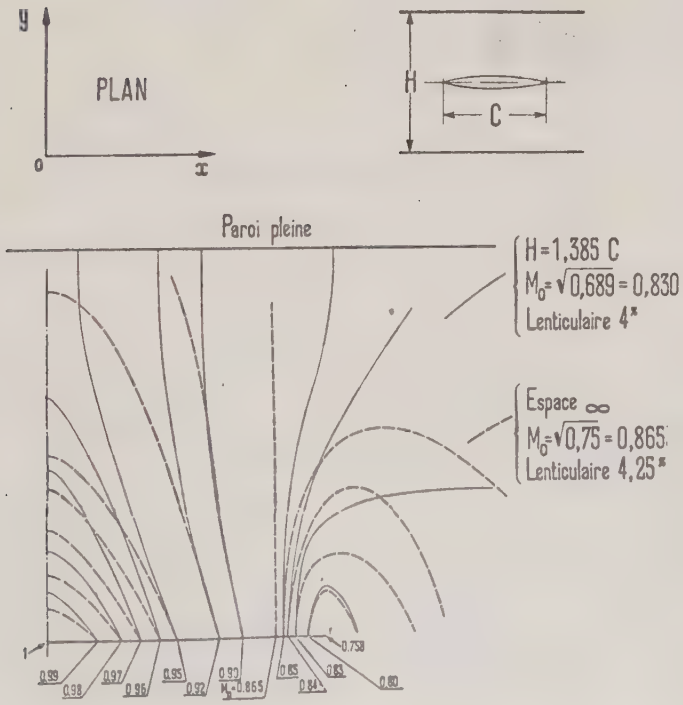


Fig.75- Champ aérodynamique autour du profil

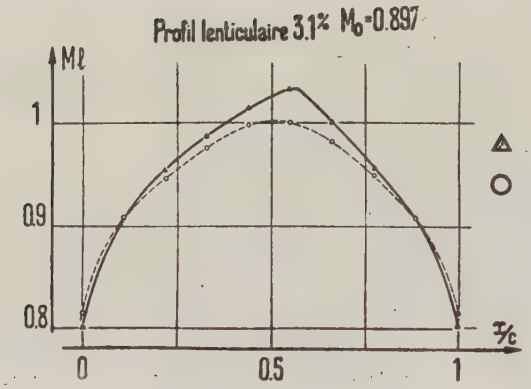


Fig.76

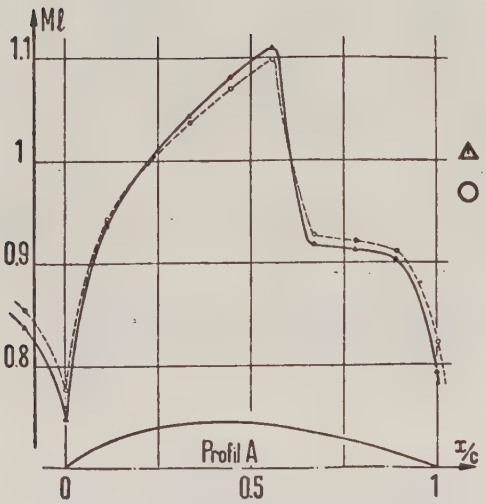


Fig.77

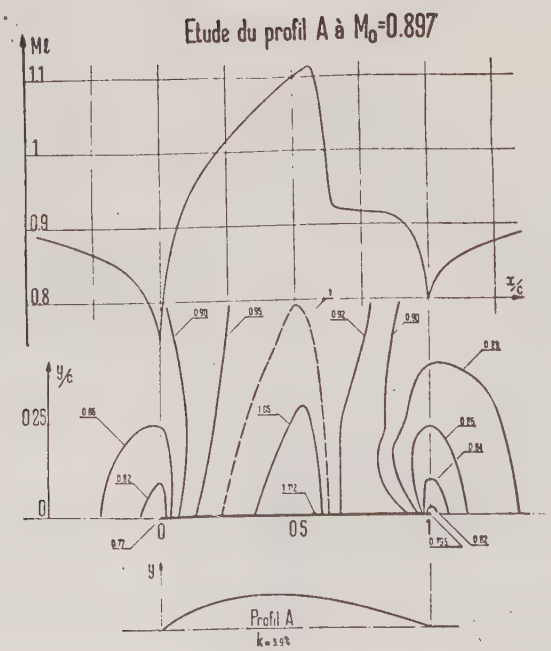


Fig.78

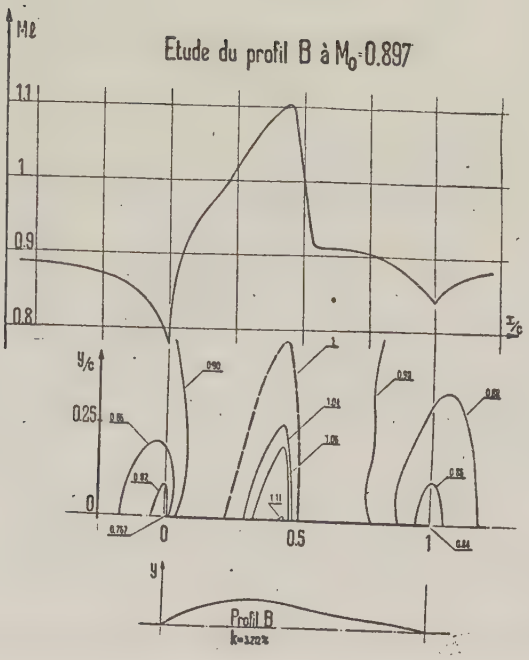


Fig.79

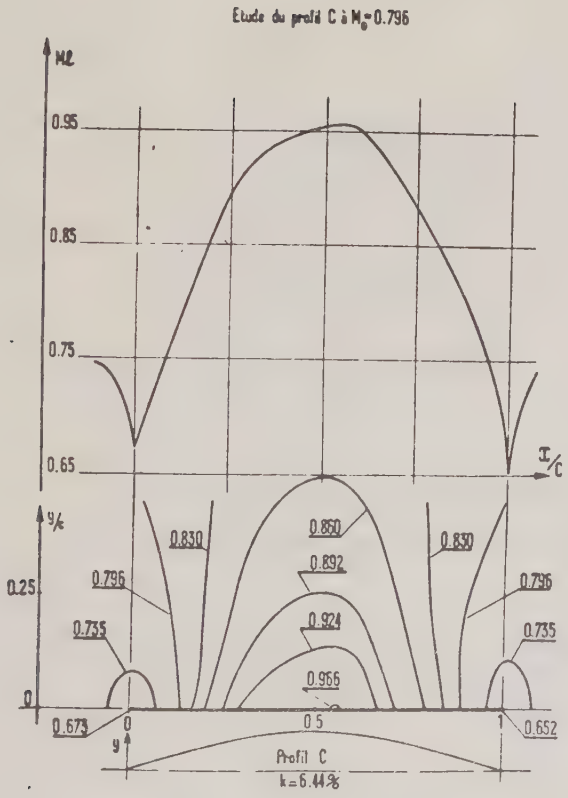


Fig.80

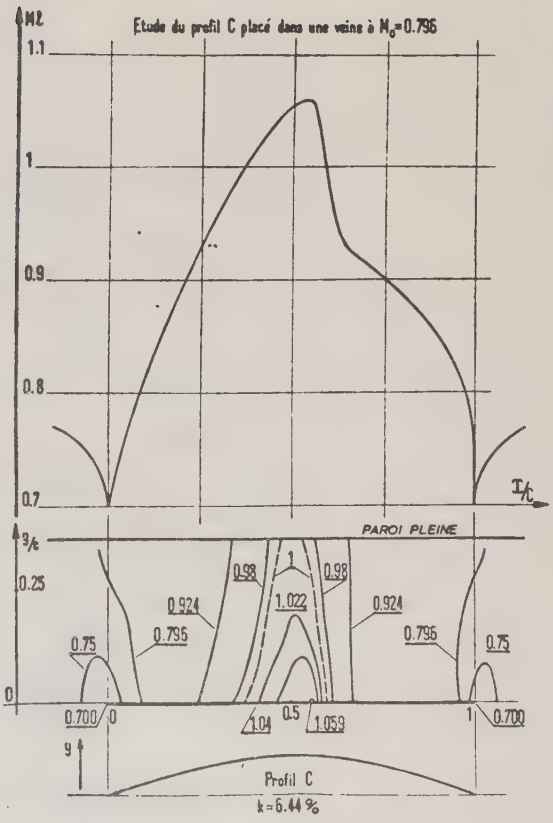


Fig.81

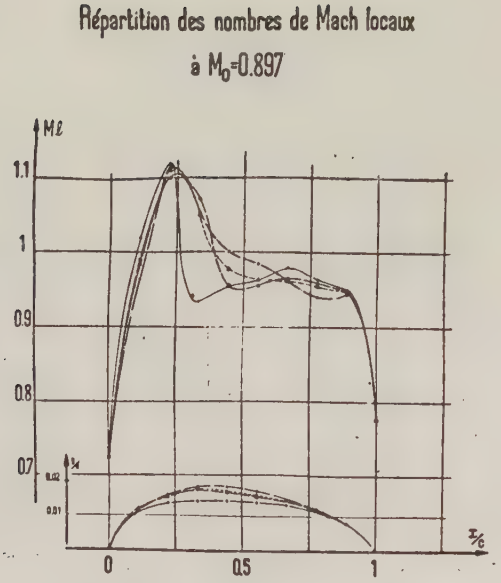


Fig.82- Etude des profils E_1, E_2, E_3, E

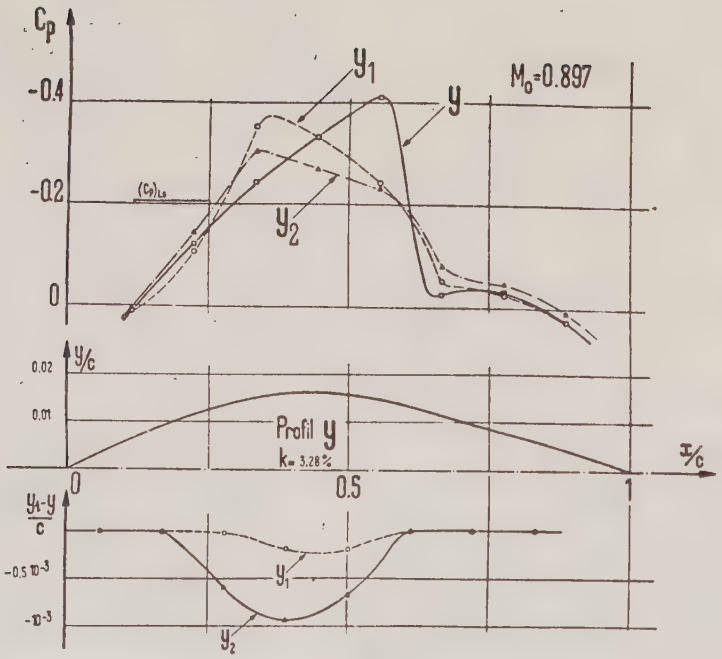


Fig.83- Modification locale d'un profil

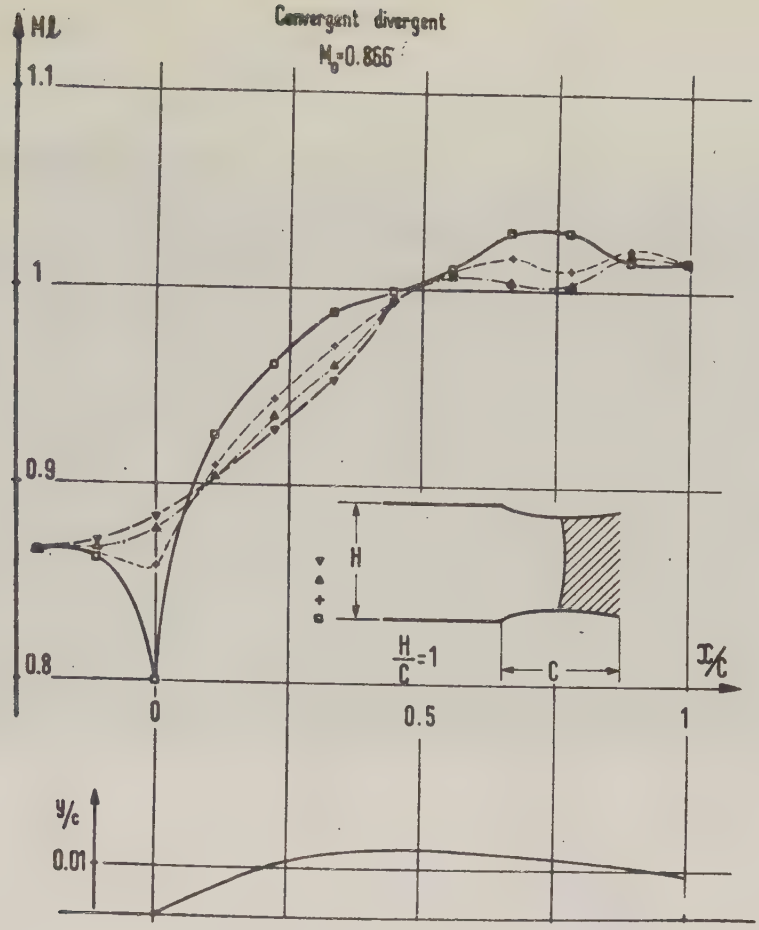

Convergent divergent
M_0=0.866
ML
1.1
1
0.9
0.8
H
$\frac{H}{C}$=1
C
x/c
0
0.5
1
y/c
0.01

Fig.84

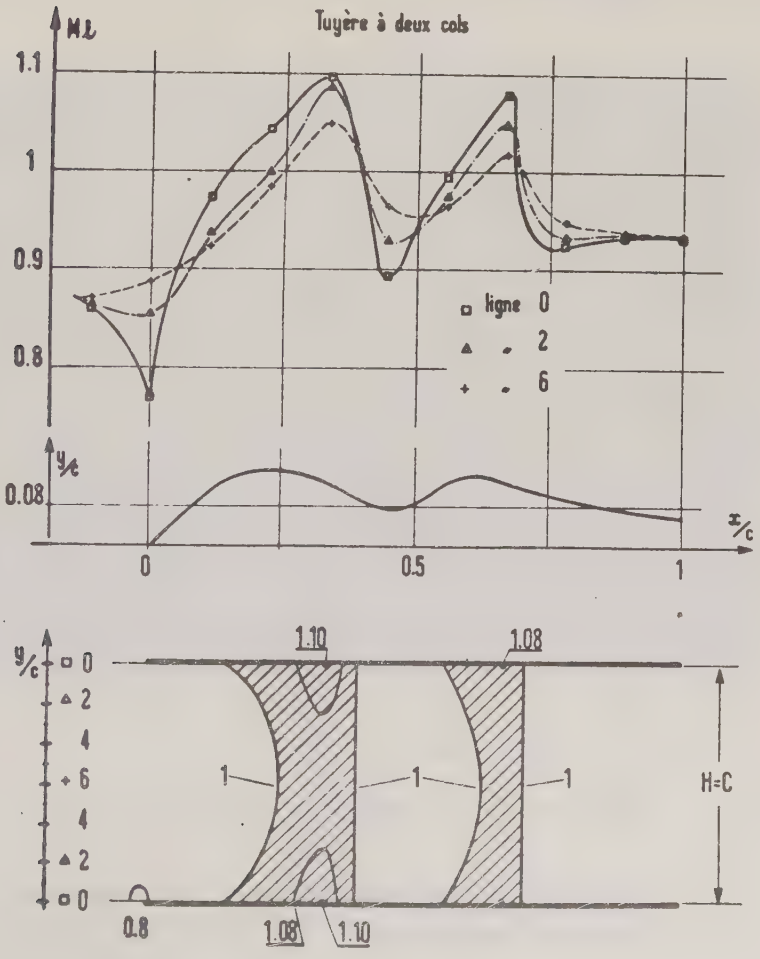

Tuyère à deux cols
ML
1.1
1
0.9
0.8
ligne 0
2
6
y/c
0.08
x/c
0
0.5
1
1.10
1.08
0
2
4
6
4
2
0
1
1
1
H=C
0.8
1.08
1.10

Fig.85

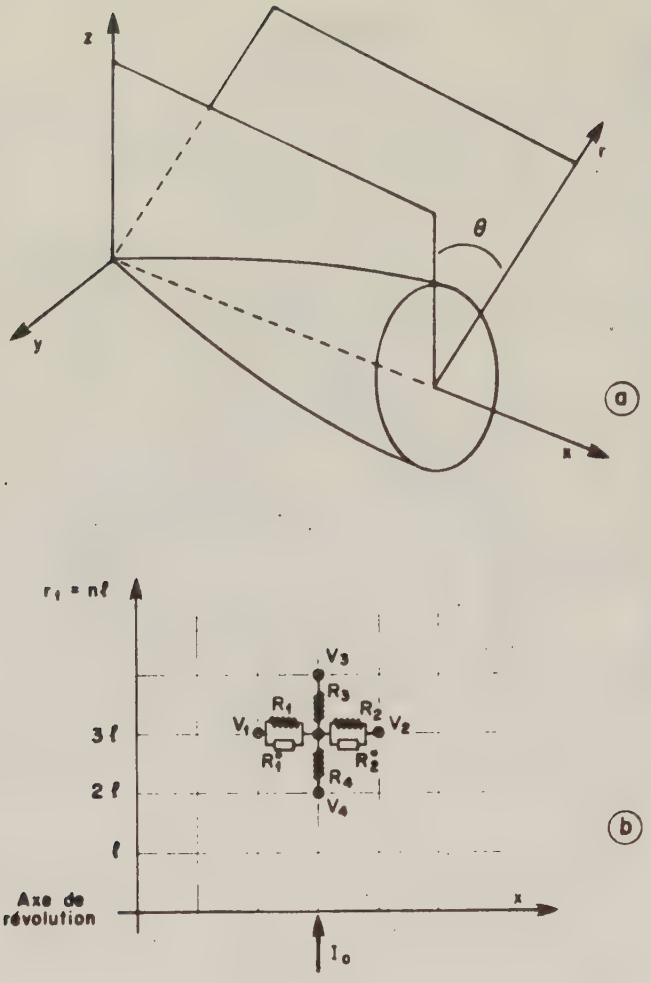


Fig.86- Système de révolution

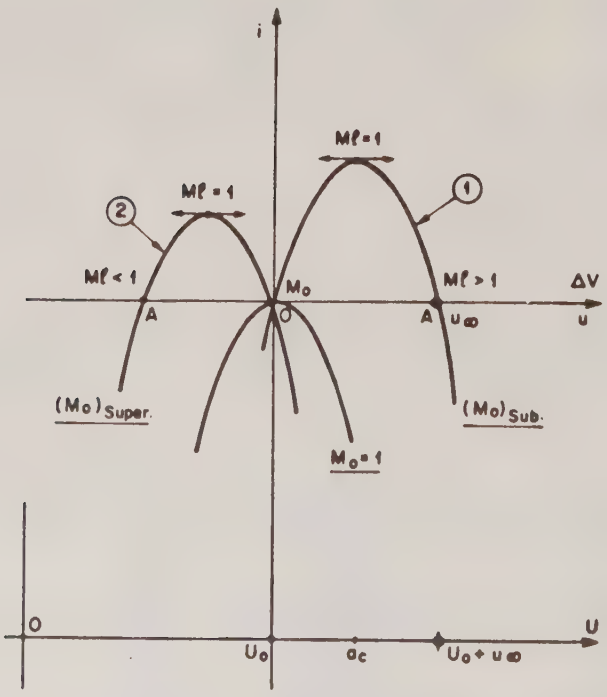


Fig.87- Cas du nombre de Mach supersonique à l'infini amont

Photo 1- Vue d'ensemble du réseau transsonique

Photo 2- Détail du réseau

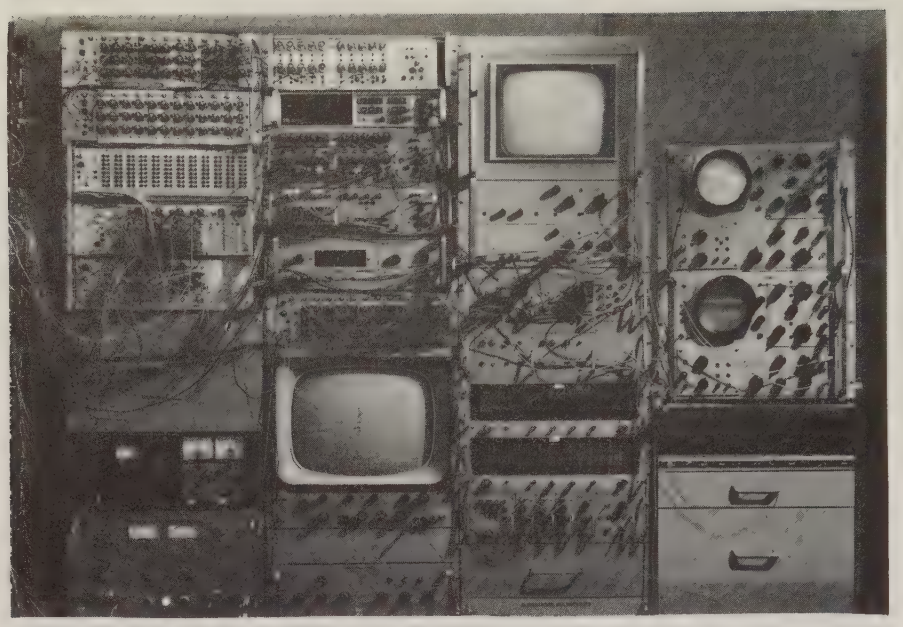


Photo 3- Ensemble des systèmes :

_ Visualisation

_ Affichage des conditions aux limites

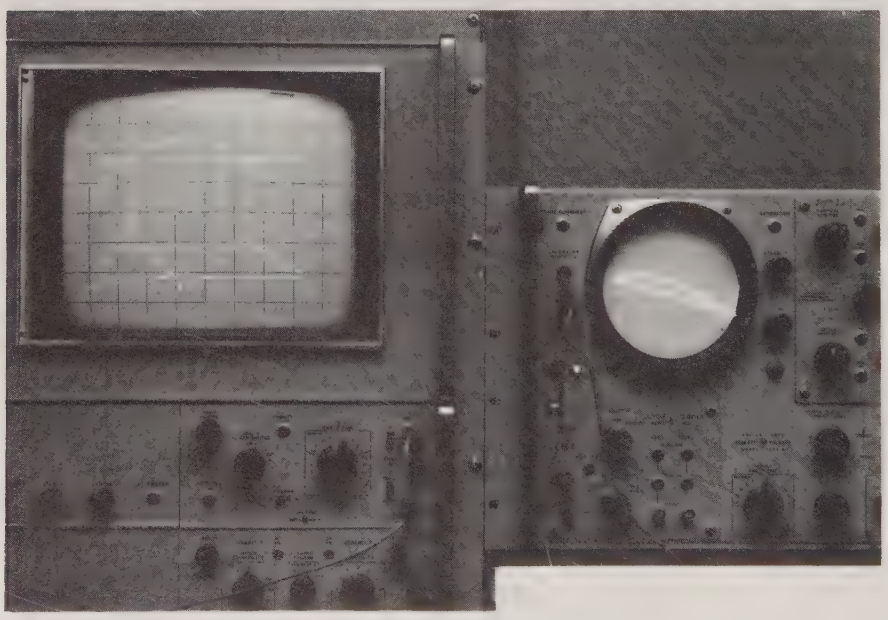


Photo 4- Visualisation des grandeurs aérodynamiques et du profil

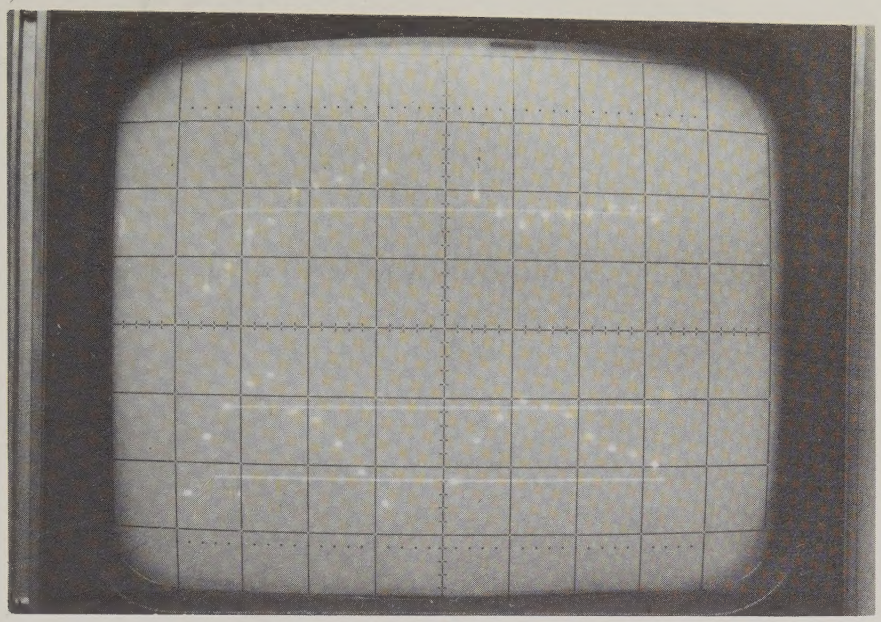


Photo 5- Visualisation

Pentes locales - extrados
Vitesses locales - extrados

Pentes locales - intrados
Vitesses locales - intrados

V	V^2	Valeur V^2 en $\frac{1}{240}$	valeur arrondie de V^2	V	V^2	Valeur V^2 en $\frac{1}{240}$	valeur arrondie de V^2
0	0	0	0	4	16	60	60
0.25	0.063	0.235	0	4.25	18.3	68.5	69
0.5	0.25	0.937	1	4.5	20.3	76	76
0.75	0.562	2.115	2	4.75	22.5	83.4	83
1	1	3.75	4	5	25	93.7	94
1.25	1.56	5.84	6	5.25	27.6	103.5	104
1.5	2.25	8.40	8	5.5	30.3	113.4	113
1.75	3.06	11.5	12	5.75	33	124	124
2	4	15	15	6	36	135	135
2.25	5.06	18.99	19	6.25	39	146	146
2.5	6.24	23.4	23	6.5	42.3	159	159
2.75	7.56	28.4	28	6.75	45.5	170.8	171
3	9	33.8	34	7	49	184	184
3.25	10.3	38.6	39	7.25	52.5	197	197
3.5	12.2	45.7	46	7.5	55.5	208	208
3.75	14.05	52.7	53	—	—	—	—

Tableau_1

V volts	I mesuré mA	I théorique mA	$\frac{Ith-Imes}{Ith}$
0	0.000	0.0	
1	0.102	0.1	0.02
2	0.397	0.4	0.0075
3	0.908	0.9	0.0089
4	1.599	1.6	0.00036
5	2.494	2.5	0.0024
6	3.611	3.6	0.0038
7	4.898	4.9	0.0041

Tableau_2

V volts	I mesuré mA	I théorique mA
-5	2.5	2.5
-4	1.594	1.6
-3	0.901	0.9
-2	0.396	0.4
-1	0.099	0.1
0	0.000	0.0
+1	0.094	0.1
+2	0.396	0.4
+3	0.896	0.9
+4	1.596	1.6
+5	2.495	2.5

Tableau_3